

---

# Schnelle Randelementmethoden für die Helmholtz-Gleichung

Dissertation  
zur Erlangung des Grades  
der Doktorin der Naturwissenschaften  
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I  
der Universität des Saarlandes

von

**Mirjam Stolper**

Saarbrücken

2004

---

---

Tag des Kolloquiums: 12. März 2004  
Dekan: Univ.-Prof. Dr. P. Slusallek  
Berichterstatte: Univ.-Prof. Dr. S. Rjasanow  
Univ.-Prof. Dr. A. K. Louis

---

---

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Angestellte in der Fachrichtung Mathematik der Universität des Saarlandes. Während dieser Zeit arbeitete ich an einem durch das Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft geförderten Industrieprojekt.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Dr. S. Rjasanow für die Vergabe der interessanten Aufgabenstellung. Neben den wertvollen Impulsen, die zur Entstehung der Arbeit beitrugen, ermöglichte er mir auch, an verschiedenen Tagungen und Workshops teilzunehmen, so dass ich viele Wissenschaftler aus dem Gebiet "Randelementmethoden" persönlich kennen lernen konnte.

Mein Dank gilt auch meinen Kollegen für das angenehme und produktive Arbeitsklima. Dem BMBF bin ich für die finanzielle Unterstützung im Rahmen des Programms "Neue Mathematische Verfahren in Industrie und Dienstleistung" zu Dank verpflichtet.

An dieser Stelle danke ich auch meinen Eltern, ohne deren jahrelange Unterstützung diese Dissertation nicht möglich gewesen wäre, und nicht zuletzt meinem Mann Tino für sein Verständnis und seine Geduld.

Saarbrücken, im Januar 2004

Mirjam Stolper

---

---

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Mathematische Modellierung</b>	<b>5</b>
1.1 Die Helmholtz-Gleichung . . . . .	5
1.2 Die Randintegralmethode . . . . .	8
1.3 Die Randelementmethoden . . . . .	15
1.3.1 Variationsprobleme . . . . .	15
1.3.2 Ansatzräume . . . . .	19
1.3.3 Stabilität und Konvergenz . . . . .	22
1.4 Der Einfluss der Wellenzahl . . . . .	32
<b>2 Fourier-Methode</b>	<b>35</b>
2.1 Grundlagen . . . . .	37
2.1.1 Dirac $\delta$ - Distribution . . . . .	37
2.1.2 Fourier-Transformation . . . . .	39
2.2 Die Kollokationsmatrizen . . . . .	41
2.2.1 Die Koordinatentransformation . . . . .	42
2.2.2 Analytische Darstellung der Matrizen $\check{D}_\xi$ und $\check{S}_\xi$ . . . . .	46
2.2.3 Die transformierten Matrizen . . . . .	48
<b>3 Approximationsmethoden</b>	<b>53</b>
3.1 Grundlegende Definitionen . . . . .	54
3.2 Die Matrix-Partitionierung . . . . .	62
3.3 Schnelle Summationsverfahren . . . . .	66
3.3.1 Das Panel-Clustering-Verfahren . . . . .	67
3.3.2 Das Multipol-Verfahren . . . . .	68
3.4 Die Adaptive Cross Approximation . . . . .	71
3.4.1 Das analytische Problem . . . . .	72
3.4.2 Numerische Aspekte . . . . .	76

---

<b>4</b>	<b>Numerische Beispiele</b>	<b>83</b>
4.1	Der Vergleich der Lösungen . . . . .	86
4.2	Die Anwendung des ACA-Verfahrens . . . . .	90
<b>A</b>	<b>Anmerkungen zur Helmholtz-Gleichung</b>	<b>95</b>
A.1	Der zweidimensionale Fall . . . . .	95
A.2	Die Herleitung der Wellengleichung . . . . .	96
A.3	Die räumliche Fourier-Transformation . . . . .	97
<b>B</b>	<b>Spezielle Funktionen</b>	<b>99</b>
B.1	Legendre- und Kugelflächenfunktionen . . . . .	99
B.2	Sphärische Funktionen . . . . .	100
	<b>Zusammenfassung</b>	<b>103</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>105</b>

---

# Einleitung

Motiviert von Fragestellungen aus industriellen Anwendungen, wie zum Beispiel die Reduzierung der Lärmbelastung, die durch Schallabstrahlung vibrierender Objekte entsteht, diskutieren wir die mathematische Beschreibung der Ausbreitung von Schallwellen eines vorgegebenen Frequenzspektrums. Das heißt wir interessieren uns für die numerische Lösungen einer Reihe äußerer Randwertprobleme der Helmholtz-Gleichung.

Numerisch werden diese Aufgaben hauptsächlich mit der Finiten Elemente Methode (FEM) und den Randelementmethoden (BEM) gelöst. Das erst genannte Verfahren verwendet für die Lösungen jedoch die Diskretisierung des gesamten Berechnungsgebietes und ist demnach für Außenraumprobleme nur bedingt geeignet. In diesem Fall werden die Lösungen in einem künstlich berandeten Berechnungsgebiet gesucht. Die zweiten Methode transformiert hingegen die Randwertprobleme in Fredholmsche Integralgleichungen erster und zweiter Art über dem Rand und lässt eine effiziente Behandlung der Außenraumprobleme zu. Die Lösungen der Randintegralgleichungen verlieren jedoch ihre Eindeutigkeit, wenn das Quadrat der gewählte Wellenzahl ein negativer Eigenwert des Laplace-Operators ist. Um dieses Problem der sogenannten irregulären Wellenzahlen zu umgehen, wird der kombinierte Potentialansatz von Brakhage und Werner [15] gewählt, der auf eine Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art führt und für alle Wellenzahlen eine eindeutige Lösung liefert.

Der Diskretisierung der Integralgleichungen stehen neben dem Nyström-Verfahren auch das Kollokations- und Galerkin-Verfahren zur Verfügung. Für das Galerkin-Verfahren werden die Aussagen über Stabilität und Konvergenz aus der Theorie der Finiten Elemente auf dem Rand gewonnen. In analoger Weise zu der Finiten Elemente Methode wirkt sich die Wahl der Wellenzahlen auf die Güte der Lösungen aus. Um die Verfahren ohne zusätzliche Bedin-

---

gungen anwenden zu können, sollte demnach jede Wellenzahl einer vorgegebenen Stabilitätsbedingung genügen.

Die bei der BEM-Diskretisierung auftretenden linearen Gleichungssysteme sind zwar kleiner dimensioniert als die bei der Diskretisierung der Differentialgleichung, die Matrizen sind hingegen vollbesetzt. Beim Aufstellen jeder Matrix werden alle Einträge berechnet, insbesondere werden die Integrale numerisch ausgewertet, wobei die Integranden singulär sein können. Die herkömmlichen Verfahren basieren auf der geschickten Unterteilung der Integrationsbereiche und dem Einsatz angepasster Quadraturformeln, deren Genauigkeit und Aufwand von der Wellenzahl abhängen. Die Mindestkomplexität zur Generierung der Matrizen würde demnach  $O(N_\kappa N^2)$  betragen, wobei  $N$  die Anzahl der Freiheitsgrade und  $N_\kappa$  die Anzahl der uns interessierenden Wellenzahlen darstellt.

Wir stellen eine neue Methode zur effizienten Auswertung der Matrixeinträge für alle Wellenzahlen vor. Die grundlegende Idee der sogenannten Fourier-Methode basiert darin, die Fourier-Transformation bezüglich der Wellenzahl geschickt auf die Singularitäten-Funktionen anzuwenden.

Die Anwendung der Fourier-Transformation ist bei der Untersuchung der Wellen- und Helmholtz-Gleichung durchaus üblich. In den Arbeiten [9], [44] oder [45] wird so das Galerkin-Verfahren für die Wellengleichung analysiert. Die entsprechenden Stabilitäts- und Konvergenzaussagen werden aus der Theorie der Helmholtz-Gleichung gewonnen, wobei die Parseval'sche Gleichung die äquivalente Formulierung liefert. Die Anwendung der Fourier-Transformation und entsprechender Rücktransformation zur effizienten und teilweise auch analytischen Berechnung der Integrale wurde bisher noch nicht eingesetzt.

Da iterative Verfahren ohne die explizite Kenntnis der Systemmatrizen auskommen und einzig die Wirkung der Matrizen auf den Vektor ausnutzen, können eine Reihe effizienter Verfahren mit nahezu linearer Komplexität betrachtet werden. Die grundlegende Idee basiert darin, die auftretenden Kernfunktionen in Bereichen, wo sie glatt sind, durch eine endliche Summe über Produkte von Funktionen zu approximieren. In den Arbeiten von Hackbusch, und Khoromskij [48], [50] werden geeignete Zerlegungen der Matrizen untersucht, so dass die entstehenden Blöcke die Berechnungsgebiete repräsentieren, auf denen der Kern glatt ist. Die wichtigsten Vertreter der sogenannten schnellen Summationsverfahren sind das Panel-Clustering-Verfahren von Hackbusch und Nowak [52] und das von Rokhlin [72] entwickelte Multipol-Verfahren. Ein Nachteil dieser Methoden ist, dass die Effizienz entscheidend

---



von der expliziten Kernentwicklung in geschlossener Form abhängen.

Die Idee des von Bebendorf und Rjasanow eingeführten ACA-Verfahrens [11], [10], [13] (Adaptive Cross Approximation) basiert hingegen auf der blockweisen Niedrigrang-Approximation von Matrizen, die durch asymptotisch glatte Kerne erzeugt werden. Ebenso wie die von Tyrtyshnikov et. al [42], [43], [85] eingeführten Methoden werden hier algebraische Mittel, die Verwendung von Rang-1-Matrizen, eingesetzt. Diese Verfahren kommen daher ohne die explizite Kenntnis der Kernentwicklung aus, lediglich die Existenz einer solchen wird vorausgesetzt. Den benötigten Rang des Approximanten gewinnt man dabei aus Abschätzungen des Approximationsfehlers. Ein weitere Vorteil des ACA-Verfahrens ist, dass sich der Rang des Approximanten an den laufenden Fehler angepasst und die Approximation beim Erreichen einer gegebenen Genauigkeit angehalten wird. Während die oben genannten schnellen Summationsverfahren in [38], [74], [73] für die Helmholtz-Gleichung weiterentwickelt wurden, wird hier erstmals das ACA-Verfahren auf die Kollokationsmatrizen der Helmholtz-Gleichung formal angepasst.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Das erste Kapitel dient der mathematischen Modellierung akustischer Probleme. Wir betrachten das äußere Randwertproblem der Helmholtz-Gleichung und beschreiben, wie dieses mit Hilfe der Integralgleichungsmethode in eine Randintegralgleichung übergeführt werden kann. Darüber hinaus stellen wir die Randelementmethoden zur Diskretisierung der Integralgleichung vor und geben für eine feste Wellenzahl die Stabilitäts- und Konvergenzanalyse für das Galerkin- und das Kollokationsverfahren an.

Die effiziente Generierung der Matrizen für verschiedene Wellenzahlen behandelt das zweite Kapitel. Wir stellen die Fourier-Methode vor und untersuchen die inverse Fourier-Transformierte der Matrizeneinträge, wobei die auftretenden Integrale mit Hilfe einer geeigneten Koordinatentransformation analytisch berechnet werden. Die erneute Anwendung der Fourier-Transformation liefert Matrizen, deren Einträge dann sehr effizient ausgewertet werden können.

Im dritten Kapitel wenden wir uns der Approximation der vollbesetzten Matrizen mit nahezu linearer Komplexität für jede Wellenzahl zu. Nach einer geeigneten Matrix-Zerlegung können die Einträge der entsprechenden Blöcken mit verschiedenen Verfahren effizient approximiert werden. Wir beschreiben kurz das Panel-Clustering- und das Multipol-Verfahren und stellen ausführlich das ACA-Verfahren zur Niedrigrang-Approximation der Blöcke vor. Ins-

besondere geben wir zwei Versionen zur Implementierung an.

In dem letzten Kapitel betrachten wir mehrere numerische Beispiele und Tests. Wir vergleichen die Lösungen der in Kapitel 2 vorgestellten Fourier-Methode und die eines Standard-Verfahrens. Darüber hinaus untersuchen wir, wie gut die Matrizen mit dem ACA-Verfahren in Abhängigkeit der Wellenzahl approximiert werden.

Abschließend sei noch auf die namensgebenden Wissenschaftler Hermann Ludwig Ferdinand Helmholtz und Jean Baptist Joseph Fourier hingewiesen,



H. Helmholtz (1821-1894)



J. Fourier (1768-1830)

deren Kurzbiographien beispielsweise unter

<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/>

gefunden werden können.

---

# 1 Mathematische Modellierung

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die akustische Schallabstrahlung eines Objektes mit Randelementmethoden zu beschreiben. Dazu stellen wir die wichtigsten mathematischen Grundlagen der Helmholtz-Gleichung zusammen und führen das Randwertproblem in ein äquivalentes Integralgleichungsproblem über. Mit Hilfe des Nyström-, Kollokations- oder Galerkin-Verfahren kann dann die räumliche Diskretisierung der zugehörigen Integralgleichung erfolgen. Die Güte der mathematischen Modellierung hängt darüber hinaus auch von der Wellenzahl ab.

## 1.1 Die Helmholtz-Gleichung

Wir betrachten die Ausbreitung zeitharmonischer, akustischer Wellen in einem homogenen, isotropen, reibungsfreien Medium mit konstanter Schallgeschwindigkeit  $c$ .

Das abstrahlende Objekt wird durch ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  mit hinreichend glattem Rand  $\Gamma = \partial\Omega$  dargestellt, dessen Außenraum  $\Omega^c = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  das zu betrachtende Ausbreitungsgebiet definiert.

Mathematisch wird die Ausbreitung der oben charakterisierten Wellen durch die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(y, t) - \Delta U(y, t) = 0 \quad (1.1)$$

beschrieben (Herleitung siehe Anhang). Dabei ist  $U(y, t)$  die orts- und zeitabhängige physikalische Feldgröße,  $y \in \mathbb{R}^3$  der Ortsvektor und  $t > 0$  die Zeit. Der Übergang zu einer zeitunabhängigen Darstellung wird mittels des Ansatzes

$$U(y, t) = \operatorname{Re}(u(y)e^{i\omega t})$$

---

gewonnen und liefert, dass die komplexwertige, nur noch vom Ort abhängende Funktion  $u(y)$  der skalaren Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u(y) + \kappa^2 u(y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^3, \quad \kappa = \frac{\omega}{c}, \quad (1.2)$$

mit der Wellenzahl  $\kappa \in \mathbb{R}^+$  und der Frequenz  $\omega > 0$  genügen muss.

**Bemerkung 1.1.1** *Eine in Ausbreitungsrichtung gedämpfte Welle kann durch Einführung einer komplexwertigen Wellenzahl*

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{\omega \gamma_D}{c^2}$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet  $\gamma_D > 0$  den Dämpfungskoeffizienten.

Wir nennen  $u(y)$  eine abstrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung, wenn sie die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial}{\partial r} - i\kappa \right) u(y) = 0, \quad r = |y|, \quad y \in \mathbb{R}^3, \quad (1.3)$$

gleichmäßig in alle Richtungen  $y/|y|$  erfüllt.

**Bemerkung 1.1.2**

1. Die Bedingung (1.3) besagt, dass sich die Welle wie eine auslaufende Kugelwelle verhält und sichert die Eindeutigkeit der Lösung der Helmholtz-Gleichung im Unendlichen, (vgl. Lemma von Rellich).
2. Lemma von Rellich [70]:  
Sei  $\kappa > 0$ . Die Lösung  $u$  der Helmholtz-Gleichung genüge der Bedingung (1.3) und

$$\int_{|y|=r} |u|^2 dF_y = O(1) \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Dann gilt  $u \equiv 0$  in  $\Omega^c$ .

Um die Lösung in (1.2) für den Außenraum  $\Omega^c$  eindeutig zu charakterisieren, fordern wir auf dem Rand des abstrahlenden Objektes zusätzliche Randbedingungen:

Für  $y \in \Gamma$  gelte

- (a)  $u(y) = u_D(y)$  (Dirichlet)
- (b)  $\partial_n u(y) = u_N(y)$  (Neumann)

mit gegebenen Randwerten  $u_D$  bzw.  $u_N$ . Dabei ist  $\partial_n u(y) = (n_y, \text{grad } u(y))$  die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen  $n_y$  im Punkt  $y \in \Gamma$ . Gelten  $u_D \equiv 0$  bzw.  $u_N \equiv 0$  auf dem Rand, so sprechen wir von dem homogenen Dirichlet- bzw. Neumann-Randwertproblem.

**Beispiel 1.1.3** *Die Randbedingungen ergeben sich aus den physikalischen Eigenschaften des abstrahlenden Objekts. So hat man bei der zeitharmonischen, akustischen Streuung für weiche Hindernisse die Dirichlet-Randbedingung und für harte die Neumann-Randbedingung.*

Zusammenfassend können wir die folgenden äußeren Randwertprobleme (RWP) für die Helmholtz-Gleichung formulieren.

Finde  $u(y)$ , so dass gilt

$$\begin{aligned} \Delta u(y) + \kappa^2 u(y) &= 0, & y \in \Omega^c, \\ u(y) &= u_D(y) \text{ bzw. } \partial_n u(y) = u_N(y), & y \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$u(y)$  genügt der Sommerfeld'schen Ausstrahlungsbedingung.

Die Lösungen der Randwertprobleme (1.4) werden wir in den Sobolev-Slobodetskij-Räumen suchen.

Seien dazu  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (hier  $n = 3$ ) ein Gebiet. Wir definieren den Sobolev-Raum

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^m(\Omega) &= \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \|v\|_{\mathbb{H}^m} < \infty\}, \\ \|v\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \left( \int_{\Omega} |D^\alpha v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dabei gelte wie üblich

$$\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \text{ mit } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \text{ und } D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}. \quad (1.5)$$

Für  $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$  mit  $r = m + \sigma$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $0 < \sigma < 1$ , bezeichnen wir den Raum  $\mathbb{H}^r(\Omega) = \{v \in \mathbb{H}^m(\Omega), \|v\|_{\mathbb{H}^r(\Omega)} < \infty\}$  als Sobolev-Slobodetskij-Raum der Ordnung  $r$  und die zugehörige Norm ist gegeben gemäß

$$\|v\|_{\mathbb{H}^r(\Omega)} = \|v\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y)|^2}{|x - y|^{n+2\sigma}} dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Räume  $\mathbb{H}^r(\Omega)$  sind Hilbert-Räume, und es gilt  $\mathbb{H}^0(\Omega) = \mathbb{L}_2(\Omega)$ . Den Sobolev-Slobodetskij-Raum  $\mathbb{H}^{-r}(\Omega)$  führen wir als Dualraum zu  $\mathbb{H}^r(\Omega)$  versehen mit der Norm

$$\|v\|_{\mathbb{H}^{-r}(\Omega)} = \sup_{0 \neq w \in \mathbb{H}^r(\Omega)} \frac{|(v, w)_{\mathbb{L}_2}|}{\|w\|_{\mathbb{H}^r(\Omega)}}$$

ein. In unseren weiteren Ausführungen benötigen wir außerdem noch für  $m \in \mathbb{N}_0$  die Sobolevräume

$$\mathbb{H}_\infty^m(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \|v\|_{\mathbb{H}_\infty^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |D^\alpha w(x)| < \infty\}.$$

Für eine ausführlichere Darstellung siehe beispielsweise [3] oder [83].

## 1.2 Die Randintegralmethode

Für die Randintegralmethode, auch Integralgleichungsmethode genannt, wird das zu lösende Randwertproblem

$$\begin{aligned} \mathcal{P}u &= 0 \text{ in } \Omega \text{ (bzw. } \Omega^c \subset \mathbb{R}^3, \\ \text{Randbedingungen für } u \end{aligned}$$

als äquivalentes Randintegralgleichungsproblem auf dem Gebietsrand  $\Gamma$  formuliert. Zentrales Hilfsmittel ist dabei die Fundamentallösung  $\mathcal{G}$  (bzw. die zugehörige Singularitäten-Funktion  $G(x, y)$ ) des gegebenen linearen, elliptischen Differential-Operators  $\mathcal{P}$  der Ordnung  $2m$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ).

Die Fundamentallösung  $\mathcal{G}$  erfüllt auf dem Raum  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$  der Distributionen mit kompakten Träger, vgl. Abschnitt 2.1.1,

$$\mathcal{P}\mathcal{G}\psi = \psi = \mathcal{G}\mathcal{P}\psi, \quad \psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3),$$

d.h.  $\mathcal{G}$  ist ein Pseudodifferential-Operator der Ordnung  $-2m$  mit der lokal integrierbaren Singularitäten-Funktion  $G(x, y) \in \mathcal{C}^\infty$  für  $x \neq y$  und

$$\mathcal{G}[f](y) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y) f(x) dx, \quad f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3),$$

vgl. [79].

Im dreidimensionalen Fall des Helmholtz-Operators  $\mathcal{P} = \Delta + \kappa^2$  ergibt sich die Singularitäten-Funktion zu

$$G(x, y) = G(x, y, \kappa) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y. \quad (1.6)$$

Die Formulierungen der Randintegralgleichungen gehen entweder von Potentialansätzen aus (klassische, "indirekte" Methode) oder sie werden mit Hilfe der "direkten" Methode aus der Green'schen Darstellungsformel gewonnen.

Wir stellen hier die erste Methode vor, und verweisen für eine detaillierte Ausführung der "direkten" Methode auf die Arbeiten [25] oder [32].

Mittels (1.6) werden das akustische Einfachschichtpotential  $V_S$  und das akustische Doppelschichtpotential  $V_D$

$$V_S(y) = \int_{\Gamma} G(x, y, \kappa) f(x) dF_x, \quad (1.7)$$

$$V_D(y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y, \kappa) f(x) dF_x, \quad (1.8)$$

für eine gegebene Dichte-Funktion  $f \in C^\infty(\Gamma)$  und  $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$  definiert und die folgenden linearen Integral-Operatoren eingeführt, d.h. für  $y \in \Gamma$  seien

1. der akustische Einfachschichtpotential-Operator

$$\mathcal{S}_\kappa[f](y) = \int_{\Gamma} G(x, y, \kappa) f(x) dF_x, \quad (1.9)$$

2. der akustische Doppelschichtpotential-Operator

$$\mathcal{D}_\kappa[f](y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y, \kappa) f(x) dF_x, \quad (1.10)$$

3. der adjungierte Doppelschichtpotential-Operator

$$\mathcal{D}_\kappa^*[f](y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y, \kappa) f(x) dF_x \quad (1.11)$$

4. und der hypersinguläre Operator

$$\mathcal{Q}_\kappa[f](y) = -\frac{\partial}{\partial n_y} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y, \kappa) f(x) dF_x. \quad (1.12)$$

Im Folgenden betrachten wir stets ein Gebiet mit glattem Rand  $\Gamma$ , d.h. es gelte  $\Gamma \in C^\infty$ .

**Bemerkung 1.2.1** Sei  $\kappa \geq 0$ . Dann gelten für die Operatoren (1.9)-(1.12) die folgenden Eigenschaften:

1.  $\mathcal{S}_\kappa$  und  $\mathcal{D}_\kappa$  ( $\mathcal{D}_\kappa^*$ ) sind schwach singuläre Integral-Operatoren, vgl. [67].

2. Die Operatoren sind Pseudodifferential-Operatoren ganzzahliger Ordnung, d.h.

$$\mathcal{S}_\kappa, \mathcal{D}_\kappa, \mathcal{D}_\kappa^* : \mathbb{H}^r(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}^{r+1}(\Gamma), \quad (1.13)$$

$$\mathcal{Q}_\kappa : \mathbb{H}^{r+1}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}^r(\Gamma), \quad r \in \mathbb{R}, \quad (1.14)$$

sind stetig.

Aufgrund der kompakten Einbettung von  $\mathbb{H}^{r+1}(\Gamma)$  in  $\mathbb{H}^r(\Gamma)$  (siehe z.B. [3]) sind die Operatoren  $\mathcal{S}_\kappa, \mathcal{D}_\kappa, \mathcal{D}_\kappa^* : \mathbb{H}^r(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}^r(\Gamma)$  kompakt.

Die entsprechenden Abbildungseigenschaften für ein Gebiet mit  $\Gamma \in \mathcal{C}^2$  und Lipschitz-Rand können in [58] bzw. [24] gefunden werden.

3. Bezüglich des  $\mathbb{L}_2$ -Skalarprodukts sind  $\mathcal{S}_\kappa$  und  $\mathcal{Q}_\kappa$  selbstadjungiert und  $\mathcal{D}_\kappa$  zu  $\mathcal{D}_\kappa^*$  adjungiert, vgl. [63].
4. Die Operatoren  $\mathcal{S}_0$  und  $\mathcal{Q}_0$  sind für  $r = -1/2$  bzw.  $r = 1/2$  stark elliptisch und erfüllen somit die Gårdingsche Ungleichung auf  $\Gamma$ , die sich für einen Pseudodifferential-Operator  $\mathcal{A} : \mathbb{H}^r(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}^{-r}(\Gamma)$  wie folgt formulieren lässt:

$$(\mathcal{A}v, v)_{\mathbb{L}_2(\Gamma)} \geq \gamma_G \|v\|_{\mathbb{H}^r(\Gamma)}^2 - (\mathcal{K}v, v)_{\mathbb{L}_2(\Gamma)} \quad \forall v \in \mathbb{H}^r(\Gamma), \quad (1.15)$$

wobei  $\gamma_G > 0$ , und  $\mathcal{K} : \mathbb{H}^r(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}^{-r}(\Gamma)$  ein kompakter Pseudodifferential-Operator ist, vgl. [18].

Darüber hinaus gilt [57], dass Pseudodifferential-Operatoren der Form

$$\mathcal{A} = \mathcal{I} + \mathcal{K} : \mathbb{L}_2(\Gamma) \rightarrow \mathbb{L}_2(\Gamma)$$

mit kompakten, schwach singulären Operatoren  $\mathcal{K}$  in  $\mathbb{L}_2$  stark elliptisch sind und die Ungleichung (1.15) erfüllen.

Wir bemerken, dass der Doppelschichtpotential-Operator  $\mathcal{D}_\kappa$  nur für hinreichend glatte Oberflächen  $\Gamma$  die Eigenschaft besitzt, in  $\mathbb{L}_2$  kompakt zu sein. Weist der Rand Ecken und Kanten auf, verliert die Aussage ihre Gültigkeit. In [54] und [55] wird gezeigt, dass durch Einführung eines Regularisierungsoperators  $\mathcal{M} : \mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma)$  der Operator  $((\mathcal{I} + \mathcal{K}) \circ \mathcal{M})$  in  $\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma)$  stark elliptisch ist.

Mit Hilfe folgender Regularisierungseigenschaften der Potentiale  $V_S$  und  $V_D$  auf dem Rand  $\Gamma$  sind wir schließlich in der Lage, die Integralgleichungen zu formulieren. Die entsprechenden Beweise findet der interessierte Leser z.B. in [18], [63].



**Satz 1.2.2** *Sei  $f \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ . Wir definieren für ein Potential  $V$*

$$V^\pm(y) = \lim_{h \rightarrow 0} V(y \pm hn_y) \text{ und } \partial_n V^\pm(y) = \lim_{h \rightarrow 0} \partial_n V(y \pm hn_y),$$

dabei ist  $n_y$  die äußere Normalenableitung im Punkt  $y \in \Gamma$ .  
Dann gelten:

1.  $V_S$  kann stetig auf  $\mathbb{R}^3$  fortgesetzt werden und es gilt

$$V_S^+(y) = V_S^-(y) = \mathcal{S}_\kappa[f](y). \quad (1.16)$$

2.  $V_D$  genügt der Sprungrelation

$$V_D^\pm(y) = \pm \frac{1}{2}f(y) + \mathcal{D}_\kappa[f](y) \quad (1.17)$$

und kann stetig auf  $\bar{\Omega}$  bzw.  $\bar{\Omega}^c$  fortgesetzt werden.

3. Für die Normalenableitung von  $V_S$  gilt

$$\partial_n V_S^\pm(y) = \mp \frac{1}{2}f(y) + \mathcal{D}_\kappa^*[f](y).$$

4. Die Normalenableitung von  $V_D$  lässt sich stetig fortsetzen, d.h.

$$\partial_n V_D^+(y) = \partial_n V_D^-(y) = \mathcal{Q}_\kappa[f](y).$$

5. Die Potentiale  $V_S$  und  $V_D$  genügen der Sommerfeld'schen Ausstrahlungsbedingung (1.3) und sind damit Lösungen der Helmholtz-Gleichung in  $\Omega$  und  $\Omega^c$ .

In 1. - 4. ist die Konvergenz für  $h \rightarrow 0$  gleichmäßig bzgl.  $y \in \Gamma$  zu verstehen.

Wir betrachten im Folgenden das äußere Dirichlet-Randwertproblem in (1.4).

$$\begin{aligned} \Delta u(y) + \kappa^2 u(y) &= 0, & y \in \Omega^c, \\ u(y) &= u_D(y), & y \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$u$  genügt der Sommerfeld'schen Ausstrahlungsbedingung (1.3).

Die Darstellung der Lösung als Einfachschichtpotential d.h.  $u(y) = V_S(y)$  aus (1.7),  $y \in \Omega^c$ , führt mittels der Eigenschaft (1.16) auf die Randintegralgleichung erster Art

$$\mathcal{S}_\kappa[f](y) = u_D(y), \quad y \in \Gamma. \quad (1.19)$$


---

Setzen wir hingegen  $u(y) = V_D(y)$  aus (1.8),  $y \in \Omega^c$ , voraus, so haben wir aufgrund (1.17) die Gleichung zweiter Art

$$\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{D}_\kappa\right)[f](y) = u_D(y), \quad y \in \Gamma, \quad (1.20)$$

zu lösen.

In analoger Weise können alle anderen Fälle behandelt werden. Eine Aufstellung, auf welche Integralgleichungen die Ansätze  $u = V_S$  bzw.  $u = V_D$  für die Dirichlet- und Neumann-Randwertprobleme im Innen- ( $\Omega$ ) bzw. Außenraum ( $\Omega^c$ ) führen, ist in Tabelle 1.1 gegeben.

Im Fall einer komplexwertigen Wellenzahl  $\kappa$  besitzen das äußere Dirichlet-Randwertproblem und die zugehörigen Randintegralgleichungen stets eindeutige Lösungen. Für  $\kappa \in \mathbb{R}^+$  können analoge Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen formuliert werden, vorausgesetzt  $-\kappa^2$  ist kein Eigenwert des Laplace-Operators  $\Delta$ .

**Bemerkung 1.2.3** *Mit Hilfe des Lemmas von Rellich kann gezeigt werden, dass das äußere homogene Dirichlet-Randwertproblem für alle Wellenzahlen  $\kappa$  eine eindeutige Lösung  $u$  besitzt und dass  $u \equiv 0$  in  $\Omega^c$  gilt.*

**Satz 1.2.4** *Das äußere Dirichlet-Randwertproblem (1.18) besitzt für alle  $u_D \in \mathbb{H}^r(\Gamma)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , stets eine eindeutige Lösung*

$$u(y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y, \kappa) f(x) dF_x, \quad u \in \mathbb{H}_{loc}^{r+\frac{1}{2}}(\Omega^c). \quad (1.21)$$

In der Darstellung (1.21) bezeichnet  $f \in \mathbb{H}^r(\Gamma)$  die Lösung der Randintegralgleichung (1.20).

Ist  $-\kappa^2$  kein Eigenwert des inneren homogenen Neumann-Randwertproblems, so ist die Gleichung (1.20) eindeutig lösbar. Im Fall einer sogenannten irregulären Wellenzahl ( $-\kappa^2$  ist ein Eigenwert) wird der Kern des Integraloperators nichttrivial.

Sei  $-\kappa^2$  ein Eigenwert des inneren homogenen Neumann-Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u}(y) &= \lambda \tilde{u}(y), & y \in \Omega, & \quad \lambda = -\kappa^2, \\ \partial_n \tilde{u}(y) &= 0, & y \in \Gamma, \end{aligned}$$

so erhalten wir mittels der Green'schen Darstellungsformel [18] für  $\tilde{u}$  auf dem Rand  $\Gamma$

$$\frac{1}{2} \tilde{u}(y) = \int_{\Gamma} \left[ G(x, y, \kappa) \partial_n \tilde{u}(x) - \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y, \kappa) \tilde{u}(x) \right] dF_x$$


---

$$= - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y, \kappa) \tilde{u}(x) dF_x$$

d.h.

$$\left( \frac{1}{2} \mathcal{I} + \mathcal{D}_{\kappa} \right) [\tilde{u}] = 0.$$

Da  $\tilde{u}$  als (nichttriviale) Lösung des homogenen Neumann-Randwertproblems nicht gleichzeitig die homogene Dirichlet-Randbedingung erfüllen kann, gilt  $\tilde{u} \neq 0$  auf dem Rand.

**Satz 1.2.5** *Das äußere Dirichlet-Randwertproblem (1.18) ist eindeutig lösbar*

$$u(y) = \int_{\Gamma} G(x, y, \kappa) f(x) dF_x, \quad u \in \mathbb{H}_{loc}^{r+\frac{3}{2}}(\Omega^c), \quad (1.22)$$

für alle  $u_D \in \mathbb{H}^{r+1}(\Gamma)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , vorausgesetzt  $-\kappa^2$  ist kein Eigenwert des inneren homogenen Dirichlet-Randwertproblems des Laplace-Operators. In (1.22) stellt  $f \in \mathbb{H}^r(\Gamma)$  die Lösung der Randintegralgleichung (1.19) dar.

Ist  $-\kappa^2$  ein Eigenwert, so ist die Gleichung (1.19) genau dann lösbar, wenn die gegebene Funktion  $u_D$  orthogonal zu dem Kern des adjungierten Einfachschichtpotential-Operators  $\mathcal{S}_{\kappa}^* = \mathcal{S}_{\kappa}$  ist. In diesem Fall ist die Lösung  $f$  nicht eindeutig.

Um das Problem dieser irregulären Wellenzahlen zu umgehen, wurde von Brakhage und Werner [15], Leis [62] bzw. Panič [68] ein kombinierter Potentialansatz gewählt.

**Satz 1.2.6** *Wir definieren die Lösung als folgendes Schichtpotential*

$$u(y) = \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y, \kappa) + i\eta G(x, y, \kappa) \right] f(x) dF_x, \quad y \in \Omega^c, \quad (1.23)$$

mit einer reellen Zahl  $\eta \neq 0$ .

Die zugehörige Randintegralgleichung

$$\left( \frac{1}{2} \mathcal{I} + \mathcal{D}_{\kappa} + i\eta \mathcal{S}_{\kappa} \right) [f](y) = u_D(y), \quad y \in \Gamma, \quad (1.24)$$

besitzt für alle Randwerte  $u_D \in \mathbb{H}^r(\Gamma)$  eine eindeutige Lösung  $f \in \mathbb{H}^r(\Gamma)$ , und der Ausdruck (1.23) liefert die eindeutige Lösung  $u \in \mathbb{H}_{loc}^{r+\frac{1}{2}}(\Omega^c)$  des äußeren Dirichlet-Randwertproblems (1.18).

RWP	Ansatz	Randintegralgleichung	EWP $\lambda = -\kappa^2$	Lösbarkeitsbedingung
$\text{IDP}_\kappa$	$u = V_S$	$\mathcal{S}_\kappa[f] = u_D$	$(\text{IDP}_0)$ :	$\int_\Gamma u_D \partial_n \tilde{u} dF = 0$
	$u = V_D$	$\left(-\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{D}_\kappa\right)[f] = u_D$	$\Delta \tilde{u} = \lambda \tilde{u}$ in $\Omega$ $\tilde{u} = 0$ auf $\Gamma$	
$\text{EDP}_\kappa$	$u = V_S$	$\mathcal{S}_\kappa[f] = u_D$	$(\text{INP}_0)$ :	—
	$u = V_D$	$\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{D}_\kappa\right)[f] = u_D$		
$\text{INP}_\kappa$	$u = V_D$	$\mathcal{Q}_\kappa[f] = u_N$	$\Delta \tilde{u} = \lambda \tilde{u}$ in $\Omega$	$\int_\Gamma u_N \tilde{u} dF = 0$
	$u = V_S$	$\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{D}_\kappa^*\right)[f] = u_N$	$\partial_n \tilde{u} = 0$ auf $\Gamma$	
$\text{ENP}_\kappa$	$u = V_D$	$\mathcal{Q}_\kappa[f] = u_N$		—
	$u = V_S$	$\left(-\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{D}_\kappa^*\right)[f] = u_N$	$(\text{IDP}_0)$	

Tabelle 1.1: Übersicht der Randintegralgleichungen und der zugehörigen Eigenwertprobleme

Bemerkung:  $\text{IDP}_\kappa$ ,  $\text{ENP}_\kappa$  stehen für **I**nneres **D**irichlet-Randwert**P**roblem bzw. äußeres (engl. **E**xterior) **N**eumann-Randwert**P**roblem der Wellenzahl  $\kappa$ , usw.

**Bemerkung 1.2.7** Nach Bemerkung 1.2.1. 4. ist der Operator aus (1.24)

$$\mathcal{A}_\kappa = \frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{K}_\kappa \quad \text{mit} \quad \mathcal{K}_\kappa = \mathcal{D}_\kappa + i\eta\mathcal{S}_\kappa \quad (1.25)$$

in  $\mathbb{L}_2(\Gamma)$  stark elliptisch und erfüllt die Gårdingsche Ungleichung.

**Beweis. (Satz 1.2.6)**

Wir zeigen, dass der Operator (1.25) ein Isomorphismus von  $\mathbb{H}^r(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}^r(\Gamma)$  ist.

Zunächst sei bemerkt, dass  $\mathcal{K}_\kappa : \mathbb{H}^r(\Gamma) \rightarrow \mathbb{H}^r(\Gamma)$  kompakt ist (siehe Bemerkung 1.2.1. 2.). Nach der Riesz-Theorie (speziell Satz 1.16 in [22]) folgt dann die Isomorphie des Operators bereits aus der Injektivität. Das heißt es

genügt zu zeigen, dass

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}_\kappa) = \{0\}.$$

Angenommen,  $f$  sei eine Lösung der homogenen Gleichung

$$\mathcal{A}_\kappa f = 0.$$

Dann löst  $u$ , wie in (1.23) definiert, das äußere homogene Dirichlet-Randwertproblem und es gilt  $u \equiv 0$  in  $\Omega^c$  (siehe Bemerkung 1.2.3). Auf dem Rand  $\Gamma$  ergeben sich dann aus den Sprungeigenschaften (Satz 1.2.2)

$$u^+(y) - u^-(y) = -u^-(y) = f(y) \text{ und } -\partial_n u^-(y) = i\eta f(y).$$

Mit Hilfe der ersten Green'schen Darstellungsformel können wir den Beweis abschließen, denn wir erhalten

$$i\eta \int_{\Gamma} |f|^2 dF_y = \int_{\Gamma} u^- \partial_n u^- dF_y = \int_{\Omega} (|\text{grad } u|^2 - \kappa^2 |u|^2) dy$$

und mit  $\kappa \in \mathbb{R}^+$  und  $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  folgt  $f \equiv 0$  auf dem Rand. ■

Alle anderen Beweise der aufgeführten Sätze sowie die entsprechenden Aussagen der anderen Randwertprobleme, die in der Tabelle 1.1 zusammengefasst sind, findet der interessierte Leser zum Beispiel in [18] oder [22].

## 1.3 Die Randelementmethoden

Die in Abschnitt 1.2 angegebenen Randintegralgleichungen werden numerisch gelöst, indem wir die unbekannte Funktion  $f$  auf der Oberfläche  $\Gamma$  approximieren und eines der bekannten Projektionsverfahren (Galerkin- bzw. Kollokationsverfahren) anwenden. Abhängig von der Wahl der Randintegralgleichung und der Diskretisierungsmethode können Konvergenz- und Stabilitätsaussagen formuliert werden. vgl. [88].

### 1.3.1 Variationsprobleme

Wir betrachten die Hilberträume  $(H_1, (\cdot, \cdot)_1)$  und  $(H_2, (\cdot, \cdot)_2)$  mit den induzierten Normen  $\|\cdot\|_1$  bzw.  $\|\cdot\|_2$ . Weiter seien  $a : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$  eine Sesquilinearform und  $l \in H_2'$  gegeben. Das zugehörige Variationsproblem lautet dann:

$$\text{„finde } v \in H_1 \text{ mit } a(v, w) = l(w) \text{ für alle } w \in H_2 \text{“}. \quad (1.26)$$

**Definition 1.3.1** Sei  $a : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$  eine Sesquilinearform.

1.  $a(\cdot, \cdot)$  heißt stetig, wenn eine Konstante  $c_s$  existiert mit

$$|a(v, w)| \leq c_s \|v\|_1 \|w\|_2 \text{ für alle } v \in H_1, w \in H_2.$$

2.  $a(\cdot, \cdot)$  erfüllt auf  $H_1 \times H_2$  die Babuška-Bedingungen, wenn zwei Konstanten  $c_b, c_b^*$  existieren, so dass

$$\inf_{\substack{v \in H_1 \\ \|v\|_1=1}} \sup_{\substack{w \in H_2 \\ \|w\|_2=1}} |a(v, w)| \geq c_b > 0 \quad (1.27)$$

$$\inf_{\substack{w \in H_2 \\ \|w\|_2=1}} \sup_{\substack{v \in H_1 \\ \|v\|_1=1}} |a(v, w)| \geq c_b^* > 0$$

Mit Hilfe des Riesz'schen Darstellungssatzes kann einer stetigen Sesquilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  auf  $H_1 \times H_2$  ein eindeutig bestimmter Operator  $\mathcal{A} \in L(H_1, H_2)$  mit  $\|\mathcal{A}\| \leq c_s$  zugeordnet werden, so dass

$$a(v, w) = (\mathcal{A}v, w)_2 \quad \text{für alle } v \in H_1, w \in H_2 \quad (1.28)$$

erfüllt ist.

**Satz 1.3.2** (Existenz und Eindeutigkeit)

Sei  $a : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Sesquilinearform. Dann sind äquivalent:

1.  $a(\cdot, \cdot)$  erfüllt die Babuška-Bedingungen.
2.  $\mathcal{A}^{-1} \in L(H_2, H_1)$  existiert.

Gilt eine der beiden Aussagen, so besitzt das Variationsproblem (1.26) eine eindeutige Lösung  $v \in H_1$ .

Für diese gilt  $\|v\|_1 \leq c_b^{-1} \|l\|$  mit  $c_b = c_b^* = \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$ .

Der Beweis kann zum Beispiel in [7] oder [46] nachgelesen werden.

Das kontinuierliche Problem (1.26) wird in eine endlichdimensionale Aufgabe übergeführt, indem wir zu  $H_1$  und  $H_2$  bezüglich des Diskretisierungsparameters  $h \in \mathbb{R}$  zwei Folgen endlichdimensionierter Räume  $V_h$  und  $W_h$  definieren, für die gelten:

1.  $V_h \subset H_1, W_h \subset H_2$  und  $\dim(V_h) = \dim(W_h) = N \in \mathbb{N}$ .
2. Es existieren  $v_h \in V_h$ , so dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_1 = 0 \quad \text{für alle } v \in H_1.$$

Damit ergibt sich folgende Variationsaufgabe (Galerkin-Petrov-Gleichung):

$$” \text{ finde } v_h \in V_h \text{ mit } a(v_h, w_h) = l(w_h) \text{ für alle } w_h \in W_h ”. \quad (1.29)$$

Die Lösung  $v_h$  wird als Galerkin-Approximation an die Lösung  $v$  des Problems (1.26) bezeichnet.

Grundlegend für die Konvergenzabschätzungen ist das erste Lemma von Strang (als Verallgemeinerung des Lemmas von Céa). Wir setzen voraus, dass das (gestörte) Problem

$$” \text{ finde } \tilde{v}_h \in V_h \text{ mit } \tilde{a}(\tilde{v}_h, w_h) = \tilde{l}(w_h) \text{ für alle } w_h \in W_h ” \quad (1.30)$$

für alle  $0 < h < h_0$  eindeutig lösbar sei, d.h. die stetige Sesquilinearform  $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$  erfülle auf  $V_h \times W_h$  die Babuška-Bedingungen.

**Satz 1.3.3** (Lemma von Strang) *Es seien  $v$  und  $\tilde{v}_h$  die Lösungen der Probleme (1.26) beziehungsweise (1.30). Dann gilt*

$$\begin{aligned} \|v - \tilde{v}_h\|_1 \leq & \inf_{v_h \in V_h} \left( \left[ 1 + \frac{c_s}{c_b} \right] \|v - v_h\|_1 + \sup_{w_h \in W_h} c_b^{-1} \frac{|a(v_h, w_h) - \tilde{a}(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_2} \right) \\ & + \sup_{w_h \in W_h} c_b^{-1} \frac{|l(w_h) - \tilde{l}(w_h)|}{\|w_h\|_2}. \end{aligned}$$

Für den Fall ( $\tilde{a} = a$  und  $\tilde{l} = l$ ) erhalten wir das Lemma von Céa.

**Beweis.** Seien  $0 \neq v_h \in V_h$  und  $0 \neq w_h \in W_h$  gegeben. Weiter gelten nach Voraussetzung

$$a(v, w_h) = l(w_h) \text{ für } v \in H_1 \text{ und } \tilde{a}(\tilde{v}_h, w_h) = \tilde{l}(w_h) \text{ für } \tilde{v}_h \in V_h.$$

Damit erhalten wir zunächst folgende Relation

$$\tilde{a}(v_h - \tilde{v}_h, w_h) = l(w_h) - \tilde{l}(w_h) - a(v - v_h, w_h) + \tilde{a}(v_h, w_h) - a(v_h, w_h).$$

Da  $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$  die Babuška-Bedingung erfüllt, erhalten wir mit der zu (1.27) äquivalenten Form

$$\begin{aligned} c_b \|v_h - \tilde{v}_h\|_1 & \leq \sup_{w_h \in W_h} \frac{|\tilde{a}(v_h - \tilde{v}_h, w_h)|}{\|w_h\|_2} \\ & \leq \sup_{w_h \in W_h} \left( \frac{|a(v - v_h, w_h)|}{\|w_h\|_2} + \frac{|l(w_h) - \tilde{l}(w_h)|}{\|w_h\|_2} + \frac{|a(v_h, w_h) - \tilde{a}(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_2} \right) \\ & \leq c_s \|v - v_h\|_1 + \sup_{w_h \in W_h} \left( \frac{|l(w_h) - \tilde{l}(w_h)|}{\|w_h\|_2} + \frac{|a(v_h, w_h) - \tilde{a}(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_2} \right). \end{aligned}$$


---

Die letzte Ungleichung ergibt sich aus der Stetigkeit der Sesquilinearform  $a(\cdot, \cdot)$ . Wenden wir noch die Dreiecksungleichung

$$\|v - \tilde{v}_h\|_1 \leq \|v - v_h\|_1 + \|v_h - \tilde{v}_h\|_1$$

an, so folgt die Behauptung. ■

Im Folgenden seien  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  mit  $\varphi_j \in V_h$  und  $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$  mit  $\psi_j \in W_h$ ,  $j = 1, \dots, N$ , Basissysteme der Räume  $V_h$  und  $W_h$ , die entsprechend als Ansatz- und Testraum bezeichnet werden und der Projektionsoperator  $\mathcal{P}_h : \mathbb{C}^N \rightarrow V_h$  gemäß

$$\mathcal{P}_h \nu = v_h = \sum_{j=1}^N \nu_j \varphi_j, \quad \nu_j \in \mathbb{C}, \quad (1.31)$$

definiert. Aufgrund der Eindeutigkeit der Basisdarstellung ist dieser invertierbar und die Galerkin-Petrov-Gleichung (1.29) kann in ein lineares Gleichungssystem übergeführt werden. Das heißt zu der Galerkin-Lösung  $v_h \in V_h$  ergibt sich mit  $\nu = \mathcal{P}_h^{-1} v_h$  folgendes lineares Gleichungssystem

$$(\mathcal{A} v_h, \psi_i)_2 = \sum_{j=1}^N \nu_j (\mathcal{A} \varphi_j, \psi_i)_2 = l(\psi_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

bzw.

$$A \nu = b, \quad A \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad b \in \mathbb{C}^N,$$

mit den Einträgen  $a_{ij} = (\mathcal{A} \varphi_j, \psi_i)_2$ ,  $b_i = l(\psi_i)$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  und  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)^T$ .

#### Bemerkung 1.3.4

1. Im Fall  $V_h = W_h$  erhalten wir das klassische Galerkin-Bubnov-Verfahren bzw. Galerkin-Verfahren und nennen es stabil, wenn für den Operator  $\mathcal{A}^{-1} \in L(V_h, V_h)$  gilt und er gleichmäßig beschränkt ist.
2. Die Kollokationsmethode kann als ein verallgemeinertes Galerkin-Petrov-Verfahren mit Dirac  $\delta$ -Distributionen als Basis des Testraumes  $W_h$  betrachtet werden.
3. Sei  $V_h \subset \mathbb{H}^r(\Gamma)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . Wir nehmen an, dass die unitäre Norm des  $\mathbb{C}^N$  zur  $\mathbb{L}_2$ -Norm äquivalent ist, d.h. für  $\nu \in \mathbb{C}$  gilt

$$c_u \|\mathcal{P}_h \nu\|_{\mathbb{L}_2(\Gamma)} \leq h \|\nu\|_2 \leq c_o \|\mathcal{P}_h \nu\|_{\mathbb{L}_2(\Gamma)}. \quad (1.32)$$



Dabei sind  $c_u, c_o > 0$  zwei von  $h$  unabhängige Konstanten.

In analoger Weise ergibt sich die Äquivalenz der Maximum-Norm des  $\mathbb{C}^N$  zur  $\mathbb{H}_\infty^0$ -Norm ( $V_h \subset \mathcal{C}(\Gamma)$ ):

$$\bar{c}_u \|\mathcal{P}_h \nu\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \leq \|\nu\|_\infty \leq \bar{c}_o \|\mathcal{P}_h \nu\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \quad (1.33)$$

für alle  $\nu \in \mathbb{C}$  und  $\bar{c}_u, \bar{c}_o > 0$  zwei von  $h$  unabhängige Konstanten.

Für das klassische Galerkin-Verfahren können wir das in [18] gezeigte Lemma angeben.

Seien dazu  $H_1 = H_2 = H$ ,  $H'$  der zugehörige Dualraum und  $V_h = W_h$ .

**Lemma 1.3.5** *Sei  $\mathcal{A} : H \rightarrow H'$  ein Isomorphismus und erfülle die Gårdingsche Ungleichung, d.h.  $(\mathcal{A}v, v)_{H' \times H} \geq \gamma_G \|v\|_H - (\mathcal{K}v, v)_{H' \times H} \forall v \in H$ , mit einem kompakten Operator  $\mathcal{K} : H \rightarrow H'$ . Dann existiert ein  $h_0 > 0$ , so dass die zugehörige Sesquilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  auf  $V_h \times V_h$ ,  $0 < h < h_0$ , die Babuška-Bedingungen erfüllt.*

### 1.3.2 Ansatzräume

Um die Ansatzräume zu konstruieren, nehmen wir an, dass die Oberfläche  $\Gamma$  in endlich viele abgeschlossene Flächenstücke  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$  zerfalle, die sich über polygonal berandeten Teilmengen  $\tilde{\Gamma}_i \subset \mathbb{R}^2$ ,  $i = 1, \dots, p$ , parametrisieren lassen.

Oder anders ausgedrückt, es existieren injektive Abbildungen  $X_i \in \mathcal{C}^t(\tilde{\Gamma}_i)$ ,  $t \geq 2$ , mit

$$\Gamma_i = X_i(\tilde{\Gamma}_i) \quad \text{und} \quad \Gamma = \bigcup_{i=1}^p \Gamma_i.$$

Sei  $\tilde{\mathcal{T}}_i$  eine Triangulierung des Parametergebietes  $\tilde{\Gamma}_i$  mit bis auf den Rand paarweise disjunkter nichtleerer Dreiecke  $\tilde{T}$ . Eine Triangulierung  $\mathcal{T}_i$  der Flächenstücke  $\Gamma_i$  ist dann gemäß  $\mathcal{T}_i = \{T = X_i(\tilde{T}), \tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_i\}$  gegeben und

$$\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{T}_i$$

ist wiederum eine Triangulierung der Oberfläche  $\Gamma$ .

Über das Maß für die Feinheit der Triangulierung  $\mathcal{T}$

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}} \text{diam}(T) \quad \text{mit} \quad \text{diam}(T) = \sup\{|x - y|, x, y \in T\}$$

wird für  $h \rightarrow 0$  eine Familie  $\{\mathcal{T}_h, 0 < h < 1\}$  von Triangulierungen definiert.

**Bemerkung und Definition 1.3.6** Sei  $\{\mathcal{T}_h, 0 < h < 1\}$  eine Familie von Triangulierungen.

1. Eine Triangulierung heißt zulässig, wenn für  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$  gilt:  
Jede Seite von  $T_1$  ist auch eine Seite von genau einem  $T_2$ , wenn  $T_1 \neq T_2$ .
2. Existieren von  $h$  unabhängige Konstanten  $C_q, c_q > 0$  mit

$$C_q h \geq \text{diam}(T) \geq \frac{1}{c_q} h \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_h,$$

dann ist die Triangulierung quasi-uniform.

3. Eine Familie von Triangulierung nennen wir regulär, wenn

$$\mu(T) \geq c_r \text{diam}^2(T) \quad \text{für alle } T \in \bigcup_h \mathcal{T}_h$$

mit  $\mu(T) = \int_T dF_x$  gilt.

Dabei ist  $c_r > 0$  eine von  $h$  unabhängige Konstante.

Im Folgenden betrachten wir eine reguläre Familie zulässiger Triangulierungen und definieren für jedes  $\mathcal{T}_h$  Spline-Räume über dem Rand  $\Gamma$

$$\begin{aligned} S_h^{m,0} &= \{g \in \mathbb{L}_2(\Gamma); g \circ X_T \in \mathbb{P}^{m-1}(\tilde{T}) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\}, \\ S_h^{m,d} &= \{g \in \mathcal{C}^{d-1}(\Gamma); g \circ X_T \in \mathbb{P}^{m-1}(\tilde{T}) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h\}, d > 0. \end{aligned}$$

$\mathbb{P}^{m-1}(\Omega)$  bezeichnet hierbei den Raum der Polynome von Grad  $m - 1$  über dem Gebiet  $\Omega$  und es gilt  $d < m \in \mathbb{N}$ .

Die Spline-Räume besitzen die folgenden Eigenschaften, die in [7] bewiesen werden:

**Satz 1.3.7** Es gelten:

1.  $S_h^{m,d}(\Gamma) \subset \mathbb{H}^d(\Gamma)$ .
2. Approximationseigenschaft:  
Seien  $\tau \leq d, \tau \leq s \leq m$  und  $v \in \mathbb{H}^s(\Gamma)$ . Für jedes  $h > 0$  existiert ein  $v_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$ , so dass

$$\|v - v_h\|_{\mathbb{H}^\tau(\Gamma)} \leq c_a h^{s-\tau} \|v\|_{\mathbb{H}^s(\Gamma)}$$

gilt, wobei die Konstante  $c_a$  von  $v$  und  $h$  unabhängig ist.

3. *Inverse Ungleichung:*

Sei  $\mathcal{T}_h$  eine quasi-uniforme Triangulierung. Für  $\tau \leq s \leq d$  existiert eine von  $v$  und  $h$  unabhängige Konstante  $c_i$ , so dass für alle  $v_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  gilt

$$\|v_h\|_{\mathbb{H}^s(\Gamma)} \leq c_i h^{\tau-s} \|v_h\|_{\mathbb{H}^\tau(\Gamma)}.$$

Häufig kann die Oberfläche  $\Gamma$  nicht explizit angegeben werden und es ergibt sich die Notwendigkeit,  $\Gamma$  mittels Interpolation durch eine stetige stückweise glatte Ersatzoberfläche  $\Gamma_\Delta$  zu ersetzen. Dazu wählen wir ein Lagrange-System stetiger finiter Elemente  $S_h^{k+1,1}$ ,  $k \geq 1$ , in Bezug auf geeignete unisolvente Punkt-Mengen von Gitterpunkten  $\{x_i = x_{i,T}\}$ , so dass in jedem  $T \in \mathcal{T}_h$  eindeutig interpoliert wird,

$$X_{T_\Delta}(x_i) = X_T(x_i) \quad \text{mit} \quad X_{T_\Delta} \in S_h^{k+1,1}.$$

Die Ersatzoberfläche  $\Gamma_\Delta$  ist dann analog zu oben über  $X_{i_\Delta}$  definiert, siehe Abbildung 1.1. Für die zugehörigen Ansatzräume  $S_h^{m,d}$  erhalten wir in diesem Fall die Bedingungen  $d \leq m-1 \leq k$  und  $0 \leq d \leq 1$ .

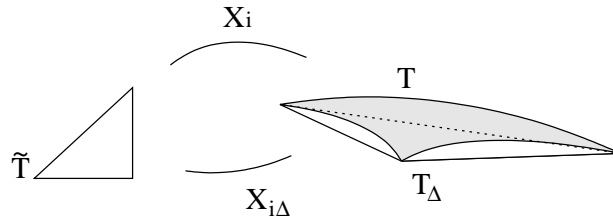


Abbildung 1.1: Parametrisierung von  $T$  und  $T_\Delta$  über einem Dreieck  $\tilde{T}$

Der Fehler, der durch die geometrische Approximation entsteht, ist ausführlich in [66], [40] oder [39] behandelt. Insbesondere werden dort der Jacobian, die Normalen und die Abstände auf  $\Gamma$  und  $\Gamma_\Delta$  untersucht.

**Bemerkung 1.3.8** Für  $k = 1$  ist  $\Gamma_\Delta$  eine Polygonfläche. Wir betrachten speziell den Fall, dass  $\Gamma_\Delta$  als eine Vereinigung ebener Dreieckselemente  $T_{\Delta i}$ ,  $i = 1, \dots, N_{el}$ , dargestellt wird, deren Eckpunkte  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N_{no}$ , auf der Oberfläche  $\Gamma$  liegen.

Weiter sei  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  eine Basis von  $S_h^{m,d}(\Gamma_\Delta)$ . In Fall  $m = 1$  und  $d = 0$  sind die Funktionen  $\varphi_i$  stückweise konstant und die Zahl der Unbekannten  $N = \dim S_h^{1,0}$  ist gleich der Anzahl der Dreieckselemente  $N_{el}$ . Wählen wir stückweise lineare  $\varphi_i$ , d.h.  $m = 2$  und  $d = 0$ , dann gilt  $N = N_{no}$ .

### 1.3.3 Stabilität und Konvergenz

Wir betrachten im Folgenden die Randintegralgleichung aus (1.24) für ein festes  $\kappa \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\mathcal{A}_\kappa[f](y) \equiv \left( \frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{D}_\kappa + i\eta\mathcal{S}_\kappa \right) [f](y) = u_D(y), \quad y \in \Gamma, \quad (1.34)$$

und wenden auf das äquivalente Variationsproblem die vorangestellten Aussagen an. Darüber hinaus zeigen wir allgemein die Konvergenz und Stabilität des resultierenden Galerkin-Verfahrens und gehen auf Konvergenzaussagen für das Kollokationsverfahren ein. Die allgemeine Formulierung ermöglicht es uns, die Aussagen auf die anderen, in Tabelle 1.1 dargestellten Randintegralgleichungen zu übertragen.

Zur Formulierung des Galerkin-Verfahrens betrachten wir das Variationsproblem

” finde  $f \in \mathbb{H}^r(\Gamma)$  mit

$$a(f, w) = (\mathcal{A}_\kappa f, w)_{\mathbb{L}_2(\Gamma)} = (u_D, w)_{\mathbb{L}_2(\Gamma)} = l(w) \quad (1.35)$$

für alle  $w \in \mathbb{H}^r(\Gamma)$  ”

und bemerken, dass die durch den Operator  $\mathcal{A}_\kappa$  definierte Sesquilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  stetig ist.

Wählen wir die Ansatz- und Testräume gemäß  $V_h = W_h = S_h^{m,d}(\Gamma) \subset \mathbb{H}^r(\Gamma)$  mit  $r \leq d$ , so ergeben sich die Galerkin-Gleichungen zu

” finde  $f_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  mit

$$(\mathcal{A}_\kappa f_h, w_h)_{\mathbb{L}_2(\Gamma)} = (u_D, w_h)_{\mathbb{L}_2(\Gamma)} \quad (1.36)$$

für alle  $w_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  ”.

Sei  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  eine Basis von  $S_h^{m,d}(\Gamma)$ . Mit  $f_h = \mathcal{P}_h \nu$  aus (1.31) erhalten wir

$$A_\kappa \nu = b, \quad A_\kappa \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad b \in \mathbb{C}^N, \quad (1.37)$$

mit den Einträgen  $a_{ij}(\kappa) = (\mathcal{A}_\kappa \varphi_j, \varphi_i)_{\mathbb{L}_2(\Gamma)}$ ,  $b_i = (u_D, \varphi_i)_{\mathbb{L}_2(\Gamma)}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  und  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)^T \in \mathbb{C}^N$ .

Da der Operator  $\mathcal{A}_\kappa$  nach Satz 1.2.6 und Bemerkung 1.2.7 in  $\mathbb{L}_2(\Gamma)$  die Voraussetzungen des Lemmas 1.3.5 erfüllt, können wir die folgende (allgemeine) Konvergenzaussage formulieren:

**Satz 1.3.9** *Sei  $f \in \mathbb{H}^s(\Gamma)$  die Lösung von (1.35). Weiter erfülle die stetige Sesquilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  auf  $S_h^{m,d}(\Gamma) \times S_h^{m,d}(\Gamma)$  die Babuška-Bedingungen. Dann gilt für die eindeutig bestimmte Lösung  $f_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  von (1.36)*

$$\|f - f_h\|_{\mathbb{H}^r(\Gamma)} \leq ch^{s-r} \|f\|_{\mathbb{H}^s(\Gamma)}, \quad r \leq s \leq m.$$

**Beweis.** Wir wenden das Lemma von Strang 1.3.3 (Lemma von Céa) mit  $H_1 = H_2 = \mathbb{H}^r(\Gamma)$  und  $V_h = W_h = S_h^{m,d}(\Gamma) \subset \mathbb{H}^r(\Gamma)$  und die Approximateigenschaft (Satz 1.3.7) mit  $r \leq s \leq m$  an und erhalten mit

$$c = c_a \left[ 1 + \frac{c_s}{c_b} \right]$$

die Behauptung. ■

Mit dem Aubin-Nitsch Trick können diese Fehlerabschätzung auch in niedrigeren Normen bewiesen werden, vgl. [57].

**Satz 1.3.10**

1. *Sei  $f \in \mathbb{H}^s(\Gamma)$  die Lösung von (1.35). Weiter erfülle die stetige Sesquilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  auf  $S_h^{m,d}(\Gamma) \times S_h^{m,d}(\Gamma)$  die Babuška-Bedingungen. Dann gilt für die eindeutig bestimmte Lösung  $v_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  von (1.36)*

$$\|f - f_h\|_{\mathbb{H}^r(\Gamma)} \leq ch^{s-r} \|f\|_{\mathbb{H}^s(\Gamma)},$$

wobei  $2r - m \leq r \leq s \leq m$ .

2. *Gilt zusätzlich noch die inverse Ungleichung, so kann die Aussage für  $2r - m \leq r \leq s \leq m$  und  $\tau \leq d$  erweitert werden.*

Wir gehen noch auf den Fall ein, dass ein gestörtes lineares Gleichungssystem

$$\tilde{A}_\kappa \nu = \tilde{b} \tag{1.38}$$

vorliegt. "Gestörte" oder fehlerbehaftete Einträge der Matrix  $\tilde{A}_\kappa$  und der rechten Seite ergeben sich unter anderem aus der zusätzlichen Approximation des Randes  $\Gamma$  durch  $\Gamma_\Delta$ , vgl. Abschnitt 1.3.2, und/oder der Notwendigkeit, die Integrale numerisch zu berechnen. Darüber hinaus werden bei der Anwendung schneller Verfahren die Einträge approximiert und daher ungenau berechnet, vgl. Kapitel 3.

Seien  $f_h, w_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$ , wobei  $f_h = \mathcal{P}_h \nu$  und  $w_h = \mathcal{P}_h \omega$  mit  $\nu, \omega \in \mathbb{C}^N$ .

---

Die zu (1.38) gehörige Sesquilinearform  $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$  und das lineare Funktional  $\tilde{l}(\cdot)$  ergeben sich dann zu

$$\tilde{a}(f_h, w_h) = \nu^* \tilde{A}_\kappa \omega \quad \text{bzw.} \quad \tilde{l}(w_h) = \omega^* \tilde{b}. \quad (1.39)$$

Analog zu Satz 1.3.9 erhalten wir für das gestörte Galerkin-Verfahren die Konvergenzaussage:

**Satz 1.3.11** *Sei  $f \in \mathbb{H}^s(\Gamma)$  die Lösung von (1.35) und die stetige Sesquilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  erfülle auf  $S_h^{m,d}(\Gamma) \times S_h^{m,d}(\Gamma)$  die Babuška-Bedingungen. Weiter gelten in der Spektral-Norm bzw. der unitären Norm die Abschätzungen*

$$\|A_\kappa - \tilde{A}_\kappa\|_2 \leq \gamma_h h^{2|r|} \|A_\kappa\|_2 \quad \text{und} \quad \|b - \tilde{b}\|_2 \leq \varepsilon_h h^{|r|} \|b\|_2.$$

Dann besitzt das gestörte Galerkin-Verfahren (1.39) eine eindeutig bestimmte Lösung  $\tilde{f}_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  und es gilt

$$\|f - \tilde{f}_h\|_{\mathbb{H}^r(\Gamma)} \leq (c_1 h^{s-r} + c_2 \gamma_h) \|f\|_{\mathbb{H}^s(\Gamma)} + c_3 \varepsilon_h \|u_D\|_{\mathbb{H}^s(\Gamma)}$$

mit  $r \leq s \leq m$ .

Für den Beweis des Satzes geben wir das folgende Lemma an.

**Lemma 1.3.12** *Es gelte die inverse Ungleichung und die stetige Sesquilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  erfülle auf  $S_h^{m,d}(\Gamma) \times S_h^{m,d}(\Gamma)$  die Babuška-Bedingungen. Dann gelten*

1. für  $r < 0$ :

$$\frac{c_b}{c_o^2 c_i^2} h^{2-2r} \leq \|A_\kappa\|_2 \leq \frac{c_s}{c_u^2} h^2 \quad \text{und} \quad \|b\|_2 \leq \frac{h}{c_u} \|u_D\|_{\mathbb{H}^{|r|}(\Gamma)}.$$

2. für  $r \geq 0$ :

$$\frac{c_b}{c_o^2} h^2 \leq \|A_\kappa\|_2 \leq \frac{c_s c_i^2}{c_u^2} h^{2-2r} \quad \text{und} \quad \|b\|_2 \leq \frac{c_i}{c_u} h^{1-r} \|u_D\|_{\mathbb{H}^r(\Gamma)}.$$

Dabei bezeichnet  $\|\cdot\|_2$  die Spektral-Norm der zugehörigen Galerkin-Matrix  $A_\kappa$  bzw. die unitäre Norm der rechten Seite  $b$  aus (1.37).

**Beweis.** Es seien  $\nu, \omega \in \mathbb{C}^N$  mit  $\omega \neq 0$ . Wir bemerken

$$\|A_\kappa \nu\|_2 = \sup_{\omega} \frac{|(\omega^* A_\kappa \nu)|}{\|\omega\|_2} = \sup_{\omega} \frac{|a(\mathcal{P}_h \nu, \mathcal{P}_h \omega)|}{\|\omega\|_2}$$

und analog

$$||b||_2 = \sup_{\omega} \frac{|l(\mathcal{P}_h \omega)|}{||\omega||_2}.$$

Sei  $r < 0$ . Zunächst ergibt sich mit der Äquivalenz der Normen (1.32) und der inversen Ungleichung

$$||\omega||_2 \leq c_o h^{-1} ||\mathcal{P}_h \omega||_{\mathbb{L}_2(\Gamma)} \leq c_o c_i h^{r-1} ||\mathcal{P}_h \omega||_{\mathbb{H}^r(\Gamma)}.$$

Da  $a(\cdot, \cdot)$  die Babuška-Bedingungen erfüllt, folgt

$$\begin{aligned} ||A_{\kappa} \nu||_2 &\geq \frac{h^{1-r}}{c_o c_i} \sup_{\omega} \frac{|a(\mathcal{P}_h \nu, \mathcal{P}_h \omega)|}{||\mathcal{P}_h \omega||_{\mathbb{H}^r(\Gamma)}} \\ &\geq \frac{c_b}{c_o c_i} h^{1-r} ||\mathcal{P}_h \nu||_{\mathbb{H}^r(\Gamma)} \geq \frac{c_b}{c_o^2 c_i^2} h^{2-2r} ||\nu||_2. \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung ergibt sich analog zu oben.

Wegen der Stetigkeit der Sesquilinearform gilt

$$\begin{aligned} ||A_{\kappa} \nu||_2 &\leq c_s ||\mathcal{P}_h \nu||_{\mathbb{H}^r(\Gamma)} \sup_{\omega} \frac{||\mathcal{P}_h \omega||_{\mathbb{H}^r(\Gamma)}}{||\omega||_2} \\ &\leq c_s ||\mathcal{P}_h \nu||_{\mathbb{L}_2(\Gamma)} \sup_{\omega} \frac{||\mathcal{P}_h \omega||_{\mathbb{L}_2(\Gamma)}}{||\omega||_2} \stackrel{(1.32)}{\leq} \frac{c_s}{c_u^2} h^2 ||\nu||_2. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite erhalten wir mit der gleichen Argumentation

$$||b||_2 \leq \frac{h}{c_u} \sup_{\omega} \frac{|(u_D, \mathcal{P}_h \omega)_{\mathbb{L}_2(\Gamma)}|}{||\mathcal{P}_h \omega||_{\mathbb{H}^r(\Gamma)}} \leq \frac{h}{c_u} ||u_D||_{\mathbb{H}^{|r|}(\Gamma)}.$$

In analoger Weise erhalten wir die Abschätzungen im Fall  $r \geq 0$ . ■

**Beweis. (Satz 1.3.11)**

Seien  $f_h, w_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  wie oben gegeben. Wir bemerken

$$\begin{aligned} |a(f_h, w_h) - \tilde{a}(f_h, w_h)| &= |\nu^*(A_{\kappa} - \tilde{A}_{\kappa})\omega| \\ &\leq ||A_{\kappa} - \tilde{A}_{\kappa}||_2 ||\nu||_2 ||\omega||_2 \\ &\leq \gamma_h h^{2|r|} ||A_{\kappa}||_2 ||\nu||_2 ||\omega||_2. \end{aligned}$$

Wir schätzen  $||A_{\kappa}||_2$  mit Lemma 1.3.12 ab und erhalten aus der Äquivalenz der Normen (1.32) und ggf. der Anwendung der inversen Ungleichung für alle  $r$  die Beziehung

$$|a(f_h, w_h) - \tilde{a}(f_h, w_h)| \leq \gamma_h c_s \hat{c}^2 ||f_h||_{\mathbb{H}^r(\Gamma)} ||w_h||_{\mathbb{H}^r(\Gamma)},$$


---

wobei  $\hat{c} = c_i c_o / c_u$ .

Für die rechte Seite beachten wir

$$|l(w_h) - \tilde{l}(w_h)| = |\omega^*(b - \tilde{b})| \leq \|b - \tilde{b}\|_2 \|\omega\|_2$$

und mit der gleichen Argumentation wie oben ergibt sich die Abschätzung

$$|l(w_h) - \tilde{l}(w_h)| \leq \varepsilon_h \hat{c} \|u_D\|_{\mathbb{H}^r(\Gamma)} \|w_h\|_{\mathbb{H}^r(\Gamma)}.$$

Seien  $f \in \mathbb{H}^s(\Gamma)$  und  $\tilde{f}_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  die eindeutig bestimmten Lösungen der Probleme (1.35) und (1.39). Wir wenden das Lemma von Strang 1.3.3 mit  $H_1 = H_2 = \mathbb{H}^r(\Gamma)$  und  $V_h = W_h = S_h^{m,d}(\Gamma) \subset \mathbb{H}^r(\Gamma)$  an und erhalten mit  $c = (1 + c_s/c_b)$

$$\begin{aligned} \|f - \tilde{f}_h\|_{\mathbb{H}^r(\Gamma)} &\leq \inf_{f_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)} \left( c \|f - f_h\|_{\mathbb{H}^r(\Gamma)} + \frac{c_s}{c_b} \hat{c}^2 \gamma_h \|f_h\|_{\mathbb{H}^r(\Gamma)} \right) \\ &\quad + \frac{\hat{c}}{c_b} \varepsilon_h \|u_D\|_{\mathbb{H}^r(\Gamma)} \\ &\leq c_a \left( \frac{\tilde{c}}{c_b} + c \right) h^{s-r} \|f\|_{\mathbb{H}^s(\Gamma)} + \frac{c_s}{c_b} \hat{c}^2 \gamma_h \|f\|_{\mathbb{H}^s(\Gamma)} \\ &\quad + \frac{\hat{c}}{c_b} \varepsilon_h \|u_D\|_{\mathbb{H}^s(\Gamma)}, \end{aligned}$$

wobei  $\gamma_h c_s \hat{c}^2 < \tilde{c}$ .

Für die letzte Abschätzung wurden die Dreiecksungleichung

$$\|f_h\|_{\mathbb{H}^r(\Gamma)} < \|f - f_h\|_{\mathbb{H}^r(\Gamma)} + \|f\|_{\mathbb{H}^r(\Gamma)}$$

und die Approximationseigenschaft mit  $r \leq s \leq m$  ausgenutzt.

Mit  $c_1 = c_a (\tilde{c}/c_b + c)$ ,  $c_2 = \hat{c}^2 c_s / c_b$  und  $c_3 = \hat{c}/c_b$  folgt die Behauptung. ■

**Satz 1.3.13** *Die stetige Sesquilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  erfülle auf  $S_h^{m,d}(\Gamma) \times S_h^{m,d}(\Gamma)$  die Babuška-Bedingungen und es gelte die inverse Ungleichung. Dann ergibt sich für die Konditionszahl der zugehörigen Galerkin-Matrix  $A_\kappa$*

$$\text{cond}_2(A_\kappa) \leq c h^{-2|r|} \quad \text{mit} \quad c = \frac{c_s}{c_b} \left( c_i \frac{c_o}{c_u} \right)^2.$$

**Beweis.** Die Behauptung erhalten wir, indem wir Lemma 1.3.12 anwenden,  $\text{cond}_2(A_\kappa) = \|A_\kappa\|_2 \|A_\kappa^{-1}\|_2$ . ■

**Bemerkung 1.3.14** *Im Fall  $\mathbb{L}_2(\Gamma)$ , d.h.  $r = 0$ , hängt die Konditionszahl nicht mehr explizit von  $h$  ab, d.h. die Matrix  $A_\kappa$  aus (1.37) ist asymptotisch gut konditioniert.*



Im Falle des Kollokationsverfahrens lautet das Problem

” finde  $f_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  mit

$$\mathcal{A}_\kappa f_h(y_i) = u_D(y_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.40)$$

in den sogenannten Kollokationspunkten  $y_i \in \Gamma$  ”,

vgl. Bemerkung 1.3.4. 2. Das zugehörige Gleichungssystem ergibt sich zu

$$A_\kappa \nu = b, \quad A_\kappa \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad b \in \mathbb{C}^N, \quad (1.41)$$

wobei nun

$$a_{ij}(\kappa) = (\mathcal{A}_\kappa \varphi_j)(y_i), \quad b_i = u_D(y_i), \quad i, j = 1, \dots, N,$$

und  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)^T \in \mathbb{C}^N$  aus (1.31) gelten.

Für das in der Praxis häufig benutzte Kollokationsverfahren liegen im Gegensatz zum Galerkin-Verfahren keine allgemeinen Konvergenzaussagen vor. Während im zweidimensionalen Fall Aussagen für bestapproximierende Splines ungerader und gerader Ordnung in [6], [77] oder [88] gezeigt werden, sind zur Zeit im dreidimensionalen Fall befriedigende Ergebnisse nur für die spezielle Klasse Fredholmscher Integralgleichungen zweiter Art mit schwach singulärem Kern bekannt.

Die zu lösende Gleichung (1.34) besitzt diese Eigenschaft, d.h.

$$\left( \frac{1}{2} \mathcal{I} + \mathcal{K}_\kappa \right) [f](y) = u_D(y), \quad y \in \Gamma, \quad (1.42)$$

und  $\mathcal{K}_\kappa = \mathcal{D}_\kappa + i\eta \mathcal{S}_\kappa$  ist ein schwach singulärer, kompakter Operator, vgl. Bemerkung 1.2.1.

Wir bemerken, dass im Fall eines nicht-glaten Randes der Doppelschichtpotential-Operator  $\mathcal{D}_\kappa$  durch  $\mathcal{D}_\kappa = \mathcal{D}_\kappa^{(1)} + \mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  dargestellt werden kann, wobei  $\mathcal{D}_\kappa^{(1)}$  ein kompakter Operator ist und der Operator  $\mathcal{D}_\kappa^{(2)}$  die Kontraktionseigenschaft  $\|\mathcal{D}_\kappa^{(2)}\| \leq q < 1$  besitzt.

Wir zeigen im Folgenden einige wichtige Resultate und verweisen für eine ausführliche Behandlung auf die Arbeiten [87] oder [86].

Sei  $\mathcal{I}_h : \mathcal{C}(\Gamma) \rightarrow S_h^{m,d}(\Gamma)$  der zu  $Y = \{y_1, \dots, y_N, y_i \text{ ist Kollokationspunkt}\}$  zugeordnete Interpolationsoperator gemäß

$$\mathcal{I}_h v(y_i) = v(y_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.43)$$

mit der Approximationseigenschaft:

Seien  $0 \leq \tau \leq s \leq m$ ,  $\tau \leq d \leq m - 1$ . Dann gilt für  $v \in \mathcal{C}^s(\Gamma)$

$$\|\mathcal{I}_h v - v\|_{\mathbb{H}_\infty^\tau(\Gamma)} \leq \bar{c}_a h^{s-\tau} \|v\|_{\mathbb{H}_\infty^s(\Gamma)}, \quad (1.44)$$

wobei die Konstante  $\bar{c}_a$  unabhängig von  $h$  und  $v$  ist.

Damit ergibt sich für (1.34) die Kollokationsgleichung

” finde  $f_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  mit

$$\frac{1}{2}f_h + \mathcal{K}_{\kappa_h} f_h = u_{D_h}, \quad \mathcal{K}_{\kappa_h} = \mathcal{I}_h \mathcal{K}_\kappa \text{ und } u_{D_h} = \mathcal{I}_h u_D. \text{ ”} \quad (1.45)$$

**Bemerkung 1.3.15** Aufgrund der Definition des Interpolationsoperators  $\mathcal{I}_h$  (1.43) ist die Gleichung (1.45) zu (1.40) mit  $\mathcal{A}_\kappa = \frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{K}_\kappa$  äquivalent.

Mit Hilfe des folgenden Lemmas, welches unter anderem in [87] gezeigt ist, können wir Konvergenzaussagen für das Kollokationsverfahren formulieren.

**Lemma 1.3.16** Es gelten folgende Voraussetzungen:

1.  $X_0 = \mathcal{C}(\Gamma)$  und  $X = \mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)$  für  $d = 0$  bzw.  $X_0 = X = \mathcal{C}(\Gamma)$  für  $d \geq 1$  zusammen mit der  $\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)$ -Norm,
2.  $\mathcal{K}_\kappa : X \rightarrow X_0$  ist ein kompakter, linearer Operator,
3.  $\|\mathcal{I}_h \mathcal{K}_\kappa v\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \leq \bar{c}_c \|v\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)}$  und  $\lim_{h \rightarrow 0} \|(\mathcal{I}_h \mathcal{K}_\kappa - \mathcal{K}_\kappa)v\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} = 0$  für alle  $v \in X_0$ ,
4. die Menge  $\bigcup_{h>0} \{(\mathcal{I}_h \mathcal{K}_\kappa - \mathcal{K}_\kappa)v, v \in X \text{ und } \|v\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \leq 1\}$  ist relativ kompakt in  $X_0$ .

Weiter sei  $f \in X_0$  die eindeutig bestimmte Lösung von (1.42) mit  $u_D \in X_0$ . Dann existiert  $h_0 > 0$ , so dass die Gleichung

$$\frac{1}{2}f_h + \mathcal{K}_{\kappa_h} f_h = u_D, \quad \mathcal{K}_{\kappa_h} = \mathcal{I}_h \mathcal{K}_\kappa, \quad (1.46)$$

für  $0 < h < h_0$  eindeutig lösbar ist und die Lösung  $f_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  genügt den folgenden Abschätzungen

$$\|f_h\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \leq \bar{c}_k \|f\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \leq c_k \|u_D\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \quad (1.47)$$

und

$$\|f - f_h\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \leq c_k \|(\mathcal{K}_{\kappa_h} - \mathcal{K}_\kappa)f\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)}. \quad (1.48)$$

Dabei sind  $\bar{c}_k$ ,  $c_k > 0$  zwei von  $h$  unabhängige Konstanten.

**Satz 1.3.17** *Sei  $h_0 > 0$ . Die Gleichung (1.42) mit  $u_D \in \mathcal{C}^r(\Gamma)$  sei eindeutig lösbar und  $f \in \mathcal{C}^r(\Gamma)$ ,  $0 \leq r \leq m$ . Dann gilt für die eindeutig bestimmte Lösung  $f_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  von (1.45)*

$$\|f - f_h\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \leq \bar{c} h^r \left( \frac{1}{2} \|f\|_{\mathbb{H}_\infty^r(\Gamma)} + \|u_D\|_{\mathbb{H}_\infty^r(\Gamma)} \right) \quad (1.49)$$

für alle  $0 < h < h_0$ .

**Beweis.** Wir bemerken zunächst,

$$(\mathcal{I}_h - \mathcal{I})\mathcal{K}_\kappa f = (\mathcal{I}_h - \mathcal{I}) \left( u_D - \frac{1}{2}f \right).$$

Für die Abschätzung (1.48) ergibt sich mittels der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|f - f_h\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} &\leq c_k \left( \|\mathcal{I}_h u_D - u_D\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} + \frac{1}{2} \|\mathcal{I}_h f - f\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \right) \\ &\stackrel{(1.44)}{\leq} c_k \bar{c}_a h^r \left( \frac{1}{2} \|f\|_{\mathbb{H}_\infty^r(\Gamma)} + \|u_D\|_{\mathbb{H}_\infty^r(\Gamma)} \right) \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mit  $\bar{c} = c_k \bar{c}_a$ . ■

Wir betrachten abschließend das gestörte lineare Gleichungssystem

$$\frac{1}{2}\tilde{\nu} + \tilde{K}_\kappa \tilde{\nu} = b, \quad b_i = u_{D_h}(y_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

und bezeichnen mit  $\tilde{\mathcal{K}}_{\kappa_h} = \mathcal{I}_h \tilde{\mathcal{K}}_\kappa : S_h^{m,d}(\Gamma) \rightarrow S_h^{m,d}(\Gamma)$  den zugehörigen linearen kompakten Operator.

**Satz 1.3.18** *Seien  $f \in \mathcal{C}^r(\Gamma)$  und  $f_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  die eindeutig bestimmten Lösungen von (1.42) mit  $u_D \in \mathcal{C}^r(\Gamma)$  bzw. von (1.45) mit  $u_{D_h} \in S_h^{m,d}(\Gamma)$ . Weiter sei in der Maximum-Norm die Abschätzung*

$$\|K_\kappa - \tilde{K}_\kappa\|_\infty \leq \delta_h \|K_\kappa\|_\infty \quad (1.50)$$

*gegeben. Dann löst  $\tilde{f}_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  ( $\tilde{f}_h = \mathcal{P}_h \tilde{\nu}$  mit  $\tilde{\nu} \in \mathbb{C}^N$ ) das gestörte Kollokationsverfahren*

$$\frac{1}{2}\tilde{f}_h + \tilde{\mathcal{K}}_{\kappa_h} \tilde{f}_h = u_{D_h} \quad (1.51)$$

eindeutig und es gilt

$$\|f - \tilde{f}_h\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \leq \bar{c}h^r \left( \frac{1}{2}\|f\|_{\mathbb{H}_\infty^r(\Gamma)} + \|u_D\|_{\mathbb{H}_\infty^r(\Gamma)} \right) + \bar{c}_g\delta_h\|u_D\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)}.$$

**Beweis.** Es gelte die Äquivalenz der Normen (1.33) für  $v = \mathcal{P}_h\nu \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  und  $\nu \in \mathbb{C}^N$ .

Zunächst schätzen wir die Norm  $\|K_\kappa\|_\infty$  mit Hilfe des Lemmas 1.3.16 ab

$$\|K_\kappa\nu\|_\infty \leq \frac{1}{\bar{c}_u}\|\mathcal{K}_{\kappa_h}v\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \leq \frac{\bar{c}_c}{\bar{c}_u}\|v\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \leq \frac{\bar{c}_o}{\bar{c}_u}\bar{c}_c\|\nu\|_\infty. \quad (1.52)$$

Es seien  $f_h, \tilde{f}_h \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  mit  $f_h = \mathcal{P}_h\nu$ ,  $\tilde{f}_h = \mathcal{P}_h\tilde{\nu}$  und  $\nu, \tilde{\nu} \in \mathbb{C}^N$ . Aus (1.45) und (1.51) erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{2}(f_h - \tilde{f}_h) + \tilde{\mathcal{K}}_{\kappa_h}(f_h - \tilde{f}_h) = (\tilde{\mathcal{K}}_{\kappa_h} - \mathcal{K}_{\kappa_h})f_h = g_h.$$

Die Abschätzung (1.48) ergibt sich mit der Äquivalenz der Normen (1.33) zu

$$\begin{aligned} \|f_h - \tilde{f}_h\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \leq c_k\|g_h\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} &\leq c_k\bar{c}_o\|(\tilde{\mathcal{K}}_\kappa - \mathcal{K}_\kappa)\nu\|_\infty \\ &\leq c_k\bar{c}_o\|\tilde{\mathcal{K}}_\kappa - \mathcal{K}_\kappa\|_\infty\|\nu\|_\infty \\ &\leq c_k\frac{\bar{c}_o}{\bar{c}_u}\|\tilde{\mathcal{K}}_\kappa - \mathcal{K}_\kappa\|_\infty\|f_h\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Wir wenden die Eigenschaft (1.50) an und schätzen ab, vgl. (1.52),

$$\begin{aligned} \|f_h - \tilde{f}_h\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} &\leq c_k\bar{c}_c\frac{\bar{c}_o^2}{\bar{c}_u^2}\delta_h\|f_h\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \\ &\stackrel{(1.47)}{\leq} \bar{c}_g\delta_h\|u_D\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)}, \quad \bar{c}_g = \bar{c}_c \left( c_k\frac{\bar{c}_o}{\bar{c}_u} \right)^2. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mittels der Dreiecksungleichung

$$\|f - \tilde{f}_h\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \leq \|f - f_h\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} + \|f_h - \tilde{f}_h\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)}$$

und der Konvergenzabschätzung (1.49). ■

**Satz 1.3.19** *Es gelten die Aussagen des Lemmas 1.3.16. Dann ergibt sich für die Konditionszahl der Kollokationsmatrix  $A_\kappa \in \mathbb{C}^{N \times N}$  aus (1.41)*

$$\text{cond}_\infty(A_\kappa) \leq \bar{c} \quad \text{mit} \quad \bar{c} = c_k\frac{\bar{c}_o^2}{\bar{c}_u^2}(1 + \bar{c}_c).$$

**Beweis.** Wir betrachten die Kollokationsgleichung

$$\frac{1}{2}f_h + \mathcal{K}_{\kappa_h}f_h = u_D, \quad \mathcal{K}_{\kappa_h} = \mathcal{I}_h\mathcal{K}_\kappa,$$

mit  $f_h = \mathcal{P}_h\nu \in S_h^{m,d}(\Gamma)$  und  $\nu \in \mathbb{C}^N$ .

Weiter gelte die Äquivalenz der Normen (1.33). Mit der Abschätzung (1.52) des letzten Beweises und der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\|A_\kappa\nu\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|\nu\|_\infty + \|K_\kappa\nu\|_\infty \leq \frac{\bar{c}_o}{\bar{c}_u}(1 + \bar{c}_c)\|\nu\|_\infty.$$

Andererseits erhalten wir mit der Abschätzung (1.47)

$$\|A_\kappa\nu\|_\infty \geq \frac{1}{\bar{c}_o}\left\|\frac{1}{2}f_h + \mathcal{K}_{\kappa_h}f_h\right\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \geq \frac{1}{\bar{c}_oc_k}\|f_h\|_{\mathbb{H}_\infty^0(\Gamma)} \geq \frac{\bar{c}_u}{\bar{c}_oc_k}\|\nu\|_\infty.$$

Damit ergibt sich

$$\text{cond}_\infty(A_\kappa) = \|A_\kappa\|_\infty\|A_\kappa^{-1}\|_\infty \leq c_k \frac{\bar{c}_o^2}{\bar{c}_u^2}(1 + \bar{c}_c)$$

und somit die Behauptung. ■

Darüber hinaus kann die Gleichung (1.34) mit dem Nyströmverfahren gelöst werden, vgl. [47]. Das Verfahren basiert im Wesentlichen darauf, das auftretende Integral durch eine geeignete Quadraturformel  $Q_\Gamma$  mit Gewichten  $w_j > 0$  und Punkten  $x_j \in \Gamma$ ,  $j = 1, \dots, N$ , zu ersetzen,

$$\begin{aligned} & \int_\Gamma \left( \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y, \kappa) + i\eta G(x, y, \kappa) \right) f(x) dF_x \\ & \approx Q_\Gamma = \sum_{j=1}^N w_j \left( \frac{\partial}{\partial n_x} G(x_j, y, \kappa) + i\eta G(x_j, y, \kappa) \right) f(x_j), \quad y \in \Gamma, \end{aligned}$$

und dann das Kollokationsverfahren anzuwenden. Wir erhalten somit das lineare Gleichungssystem

$$\frac{1}{2}f(y_i) + \sum_{j=1}^N w_j \left( \frac{\partial}{\partial n_x} G(x_j, y_i, \kappa) + i\eta G(x_j, y_i, \kappa) \right) f(x_j) = u_D(y_i),$$

$i = 1, \dots, N$ . Die zugehörige Systemmatrix  $A_\kappa$  mit

$$a_{ij}(\kappa) = \begin{cases} (\partial_{n_x} G(x_j, y_i, \kappa) + i\eta G(x_j, y_i, \kappa)) f(x_j) & i \neq j \\ \frac{1}{2} & i = j \end{cases}$$

wird auch als Punktauswertungsmatrix bezeichnet.

Ähnlich wie beim Kollokationsverfahren ergeben sich auch hier Schwierigkeiten, allgemeine Aussagen über Konvergenz und Stabilität im dreidimensionalen Fall zu formulieren.

## 1.4 Der Einfluss der Wellenzahl

Bei unseren bisherigen Betrachtungen und Konvergenzuntersuchungen haben wir stets angenommen, dass die Wellenzahl  $\kappa \in \mathbb{R}^+$  fest gewählt ist und sie nicht näher berücksichtigt. Es ist jedoch bekannt [8], dass die Beziehung zwischen der Wellenzahl und der Feinheit der Diskretisierung  $h$  eine wichtige Rolle spielt. Neben der in der Ingenieurwissenschaft häufig angewendeten Faustregel

$$\kappa h \leq \pi/5 \quad \text{für} \quad \kappa > 1, \quad (1.53)$$

bestimmt die Bedingung  $\kappa^2 h < 1$  wesentlich die Stabilität der Verfahren, vgl. [33]. Anhand eines eindimensionalen Modellproblems für die Helmholtz-Gleichung wird in [59] gezeigt, dass bei der Finiten Elemente Methode der Fehlerterm  $\kappa^3 h^2$  auftritt, der zu der obigen Beziehung führt. Ähnliche Resultate für zwei- und dreidimensionale Modellprobleme sind unter anderen in [30] oder [8] zu finden.

Darüber hinaus untersucht Giebermann [38] den Einfluss der Wellenzahl auf den Kopplungsparameter  $\eta = \eta(\kappa)$  aus (1.24) und zeigt, dass bei Anwendung des Galerkin-Verfahrens auf die Randintegralgleichung von Brakhage und Werner auf der Einheitssphäre und der Wahl  $\eta = -\kappa/2$ ,  $\kappa > 1$ , eine Konstante  $C$  unabhängig von  $\kappa$  existiert, so dass der Galerkin-Operator  $\mathcal{A}_\kappa$  aus (1.36) für  $h < C\kappa^{-1}$  stetig invertierbar ist.

In Abschnitt 1.3.3 haben wir gesehen, dass für den Operator aus (1.34) die zugehörige Galerkin-Gleichung asymptotisch gut konditioniert ist. Im Allgemeinen gilt jedoch  $\text{cond}_2(A_\kappa) = O(N)$  und damit  $\text{cond}_2(A_\kappa) = O(\kappa^2)$ . Diese Beziehung ergibt sich aus den obigen Überlegungen, wenn wir das Verhalten  $N = O(\kappa^2)$  beachten. Es empfiehlt sich bei der iterativen Lösung eine passende Vorkonditionierung zu verwenden, vgl. dazu unter anderen [69], [81] und speziell für die Helmholtz-Gleichung [20] oder [34].

Neben dem angesprochenen "mittleren" Spektrum gilt es, auf die beiden Grenzfälle  $\kappa \rightarrow \infty$  und  $\kappa \rightarrow 0$  hinzuweisen.

Unter anderen wird in [14], [60] der Fall  $\kappa \rightarrow \infty$  für die zeitharmonische Wel-

lenausbreitung im inhomogenen Medium mit Hilfe der geometrischen Optik untersucht. Die Modifizierung der Ansatzräume, um ein stabiles Verfahren für hohe Wellenzahlen zu erhalten, steht in [1] im Vordergrund.

Im Fall kleiner Wellenzahlen verweisen wir auf die Arbeiten [4], [27] oder [58].

Der Grenzwert  $\kappa = 0$  entspricht gerade dem Laplace-Problem,

$$G(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y,$$

welches in der Literatur sehr eingehend behandelt ist.





## 2 Fourier-Methode

In diesem Kapitel steht die Auswertung der Matrizen aus Abschnitt 1.3.3 in Abhängigkeit der Wellenzahl im Mittelpunkt unseres Interesses. Das heißt wir geben ein Spektrum aus  $N_\kappa$  Wellenzahlen vor und interessieren uns für die Lösungen der äußeren Dirichlet-Randwertprobleme (1.18) mit  $0 \leq \kappa \leq \kappa_{max}$ , wobei die obere Schranke  $\kappa_{max}$  der Stabilitätsbedingung (1.53) genügt.

Insbesondere betrachten wir die Kollokationsmatrizen  $A_\kappa$  und beachten, dass die Singularitäten-Funktion  $G(x, y, \kappa)$  aus (1.6) explizit von der Wellenzahl  $\kappa$  abhängt.

$$A_\kappa \nu \equiv \left( \frac{1}{2} I + D_\kappa + i\eta S_\kappa \right) \nu = b, \quad (2.1)$$

wobei die Einträge der Matrizen  $D_\kappa, S_\kappa \in \mathbb{C}^{N \times N}$  durch

$$d_{ij}(\kappa) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{i\kappa|x-y_i|}}{|x-y_i|} \varphi_j(x) dF_x \quad (2.2)$$

beziehungsweise

$$s_{ij}(\kappa) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\kappa|x-y_i|}}{|x-y_i|} \varphi_j(x) dF_x \quad (2.3)$$

mit  $y_i \in Y$  und  $i, j = 1, \dots, N$  gegeben sind.

Im Allgemeinen können die auftretenden Integrale nicht analytisch angegeben werden und es bedarf dem Einsatz geeigneter Quadraturformeln, deren Genauigkeit und numerischer Aufwand von  $\kappa$  abhängen. Darüber hinaus be-

---

sitzen die Integrale an der Stelle  $x = y_i$  eine Singularität, so dass üblicherweise die Singularitäten-Funktion  $G(x, y, \kappa)$  gemäß

$$G(x, y, \kappa) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x-y|} - 1}{|x-y|} + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} = G_1(x, y, \kappa) + G_2(x, y, \kappa)$$

aufgespalten und getrennt untersucht wird. Dabei ist zu bemerken, dass die Funktionen  $G_1(x, y, \kappa)$  und  $\partial_n G_1(x, y, \kappa)$  stetig und beschränkt sind und die Integration der Funktion  $G_2(x, y, \kappa) = G(x, y, 0)$  in der Literatur eingehend behandelt wurde, vgl. [38]. Einen anderen Ansatz, der darauf beruht, die Integrale mittels einer geeigneten Transformation über dem Parametergebiet auszuwerten, findet der interessierte Leser in [17].

Mit den herkömmlichen Verfahren müssen die Matrizen  $D_\kappa$  und  $S_\kappa$  demnach für jede Wellenzahl neu berechnet werden.

Um für alle Wellenzahlen die Einträge effizient und unter gewissen Voraussetzungen auch analytisch auszuwerten, stellen wir hier eine neue Methode vor. Die grundlegende Idee der sogenannten Fourier-Methode besteht darin, die Fourier-Transformation bezüglich der Wellenzahl  $\kappa$  geeignet anzuwenden:

Die Matrizen  $C(\kappa) \in \mathbb{C}^{N \times N}$  mit  $C(\kappa) = D_\kappa$  oder  $C(\kappa) = S_\kappa$  sind durch

$$C(\kappa) = \mathcal{F}_{\xi, \kappa} \underbrace{\left[ \mathcal{F}_{\kappa, \xi}^{-1} [C(\kappa)](\xi) \right]}_{= \check{C}(\xi)}(\kappa)$$

eindeutig bestimmt.

Wir bemerken, dass die inverse Fourier-Transformierte  $\check{C}(\xi)$  mit  $\xi = ct$  als Randlementmatrix der Wellengleichung (1.1) aufgefasst werden kann.

Die Randwertprobleme der Wellengleichung können analog zu den in Kapitel 1 dargestellten Überlegungen mit den Randlementmethoden gelöst werden. Einige Stabilitäts- und Konvergenzaussagen findet der interessierte Leser unter anderen in [29], [28] oder [36]. Darüber hinaus sind die Abbildungseigenschaften der zugehörigen Integral-Operatoren in [21] zusammengestellt.

Während in [84] die Randlementmethoden für die Helmholtz- und Wellengleichung unabhängig voneinander untersucht werden, liegt das Ziel der Arbeiten [9] oder [44] darin, die vorhandenen Stabilitäts- und Konvergenzresultate der Helmholtz-Gleichung mit einer komplexwertigen Wellenzahl  $\kappa = \kappa_r + i\kappa_i \in \mathbb{C}$ ,  $\kappa_i > 0$ , zur Untersuchung der Wellengleichung auszunutzen. Die äquivalente analytische Behandlung der Gleichungen basiert dabei auf der formalen Fourier-Transformation  $\hat{f}(\kappa) = \mathcal{F}(e^{-\kappa_i \xi} f)(\kappa_r)$  und der Parseval'sche Gleichung. In [45] werden diese Ausführungen zugrunde gelegt, um

das Galerkin-Verfahren für die Wellengleichung zu formulieren.

In unserem Fall stellen die Fourier-Transformationen  $(\kappa \rightarrow \xi)$  und  $(\xi \rightarrow \kappa)$  die zentralen Hilfsmittel zur numerischen Auswertung der auftretenden Matrizen dar. In den angeführten Arbeiten werden hingegen die Matrizeneinträge stets mit den gewöhnlichen Standard-Verfahren der Helmholtz- und Wellengleichung berechnet.

Darüber hinaus wird in der Arbeit [31] (und in den dort angegebenen Referenzen) eine Fourier-Methode bezüglich der Ortskoordinate  $x$  bzw.  $y \in \mathbb{R}^3$  vorgestellt. Alternativ wird das Galerkin-Verfahren mit den transformierten Größen der Singularitäten- und den Ansatzfunktionen formuliert, deren Existenz und Eindeutigkeit wieder durch die Parseval'sche Gleichung gesichert ist. Im Anhang geben wir speziell die räumliche Fourier-Transformierten von  $G(x, y, \kappa)$  an.

Nach der Bereitstellung einiger grundlegender Definitionen und Eigenschaften der Dirac  $\delta$ -Distribution und der Fourier-Transformation untersuchen wir die inverse Fourier-Transformierte  $(\kappa \rightarrow \xi)$  der Matrizen. Mittels der eingeführten Koordinatentransformation werden die auftretenden Integrale analytisch ausgewertet und auf die so gewonnenen Matrizen die Fourier-Transformation  $(\xi \rightarrow \kappa)$  angewandt.

## 2.1 Grundlagen

Für unsere weiteren Ausführungen genügt es, die Aussagen im eindimensionalen Fall zu diskutieren. Der mehrdimensionale Fall lässt sich ganz analog dazu behandeln. Für eine detaillierte Ausführung verweisen wir den interessierten Leser auf [18], [37] oder [56].

### 2.1.1 Dirac $\delta$ - Distribution

Der Schwartz-Raum  $\mathcal{S}$  der schnell abklingenden glatten Test-Funktionen ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) ; |\langle x \rangle^m D^n v(x)| < C_{m,n}\}$$

für  $m, n \in \mathbb{N}_0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  und einer gegebenen positiven Konstante  $C_{m,n}$ . Dabei gilt  $\langle x \rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$  und  $D^n$  aus (1.5). Den zugehörige Dualraum  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  nennen wir den Raum der temperierten Distributionen.

---

**Beispiel 2.1.1** Sei  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion, für die

$$\psi(x) = \mathcal{O}(\langle x \rangle^r), \quad |x| \rightarrow \infty$$

mit  $r \in \mathbb{R}$  gilt. Dann definiert  $\psi$  eine temperierte Distribution über  $\mathcal{S}$  gemäß

$$\langle \psi, v \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \overline{v(x)} dx \quad \forall v \in \mathcal{S}. \quad (2.4)$$

**Bemerkung 2.1.2** Wir werden die Notation (2.4) auch für die Dirac  $\delta$ -Distribution

$$\langle \delta, v \rangle = v(0) \quad \forall v \in \mathcal{S}$$

anwenden.

Weiter betrachten wir  $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$  und seinen Dualraum  $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ , den Raum der Distributionen mit kompakten Träger. Für  $\mathcal{S}$  bzw.  $\mathcal{S}'$  gelten dann folgende Inklusionen

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{S} \quad \text{und} \quad \mathcal{S}' \subset \mathcal{E}'.$$

Die Ableitung einer Distribution  $\psi \in \mathcal{E}'$  ist definiert als

$$\langle \psi', v \rangle = -\langle \psi, v' \rangle \quad \forall v \in \mathcal{E}.$$

**Beispiel 2.1.3** Die Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

definiert gemäß (2.4) eine Distribution, die wir auch mit  $H(x)$  bezeichnen. Dann ergibt sich für die distributionelle Ableitung

$$\langle H', v \rangle = -\langle H, v' \rangle = -\int_0^\infty v'(x) dx = -[v(\infty) - v(0)] = v(0) \quad \forall v \in \mathcal{E}$$

und mit Bemerkung 2.1.2 erhalten wir gerade  $H'(x) = \delta(x)$ .

Wenn wir zusätzlich annehmen, dass  $v(x) = g(x)w(x)$ , wobei  $g(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  und  $v, w \in \mathcal{E}$ , dann erhalten wir mit Hilfe der Produktregel

$$\langle \psi', v \rangle = -\langle \psi, g'w \rangle - \langle \psi, gw' \rangle. \quad (2.5)$$

In unseren weiteren Ausführungen benötigen wir die Darstellungsformel der Distribution  $\delta(g(x))$ ,

$$\langle \delta(g(x)), v \rangle = \sum_{k=1}^n v(x_k) \frac{1}{|g'(x_k)|} \quad \forall v \in \mathcal{S}, \quad (2.6)$$

wobei  $g(x)$  eine differenzierbare Funktion ist, die  $n$  einfache Nullstellen  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , besitzt, vgl. [37].

### 2.1.2 Fourier-Transformation

Für eine Funktion  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist die eindimensionale Fourier-Transformierte durch

$$\hat{v}(x) \equiv \mathcal{F}_{\xi,x}[v(\xi)](x) = \int_{\mathbb{R}} v(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (2.7)$$

definiert und existiert, wenn  $v \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ . Mit der zugehörigen Inversionsformel (inverse Fourier-Transformierte)

$$v(\xi) = \mathcal{F}_{x,\xi}^{-1}[\hat{v}(x)](\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{v}(x) e^{-ix\xi} dx \quad (2.8)$$

erhalten wir die Beziehungen

$$\check{v}(\xi) \equiv \mathcal{F}_{x,\xi}^{-1}[v](\xi) = \frac{1}{2\pi} \hat{v}(-\xi) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{F}_{\xi,x}[\hat{v}](x) = 2\pi v(-x). \quad (2.9)$$

Um die Fourier-Transformation für  $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  anzugeben, bemerken wir zunächst, dass die Darstellungen (2.7) und (2.8) die Fourier-Transformierte und ihre Inverse für jede Test-Funktion  $v \in \mathcal{S}$  definieren und die linearen Abbildungen

$$\mathcal{F}^{\pm 1} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

stetig und surjektiv sind, vgl. [18].

Wir fassen einige grundlegende Eigenschaften zusammen.

**Satz 2.1.4** *Seien  $v, w \in \mathcal{S}$  und  $g \in \mathbb{P}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ . Dann gelten*

$$\begin{aligned} 1. \quad & \mathcal{F}_{x,\xi}[D^n v(x)](\xi) = (-i\xi)^{(n)} \hat{v}(\xi) \\ & \mathcal{F}_{x,\xi}\left[g\left(\frac{d}{dx}\right)v(x)\right](\xi) = g(-i\xi) \hat{v}(\xi) \\ & \mathcal{F}_{x,\xi}[x^n v(x)](\xi) = (-i)^n D^n \hat{v}(\xi) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \mathcal{F}_{x,\xi}[v * w](\xi) = \hat{v}(\xi) \cdot \hat{w}(\xi) \\ & \mathcal{F}_{x,\xi}[v \cdot w](\xi) = \frac{1}{2\pi} (\hat{v}(\xi) * \hat{w}(\xi)) \end{aligned}$$

$$\text{Dabei ist } (v * w)(x) = \int_{\mathbb{R}} v(x-z)w(z)dz.$$

### 3. (Parseval'sche Gleichung)

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{v}, \hat{w} \rangle.$$

In analoger Weise erhält man die Aussagen auch für  $\mathcal{F}^{-1}$ .

**Beweis.** Wir zeigen stellvertretend die dritte Aussage. Es gilt mit (2.4)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} v(x) \overline{w(x)} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{w(x)} \int_{\mathbb{R}} \hat{v}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{v}(\xi) \int_{\mathbb{R}} \overline{w(x) e^{ix\xi}} dx d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{v}(\xi) \overline{\hat{w}(\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Die anderen Beziehungen kann man analog durch Nachrechnen zeigen. ■

Die folgenden Aussagen sind unter anderem in [89] gezeigt.

**Satz und Definition 2.1.5** Sei  $\psi \in \mathcal{S}'$  eine temperierte Distribution. Dann ist die Fourier-Transformierte  $\hat{\psi}$  wohldefiniert

$$\langle \hat{\psi}, v \rangle = \langle \psi, \hat{v} \rangle \quad \forall v \in \mathcal{S} \quad (2.11)$$

und die Abbildungen

$$\mathcal{F}^{\pm 1} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$$

sind linear, stetig und surjektiv.

**Beispiel 2.1.6** Nach (2.11) gilt für die Dirac  $\delta$ -Distribution

$$\langle \hat{\delta}, v \rangle = \langle \delta, \hat{v} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \int_{\mathbb{R}} v(\xi) e^{ix\xi} d\xi dx = \int_{\mathbb{R}} v(\xi) d\xi = \langle 1, v \rangle$$

für alle  $v \in \mathcal{S}$ , d.h.  $\hat{\delta} = 1$  und ganz analog  $\check{\delta} = \frac{1}{2\pi}$ .

Mit den Beziehungen (2.9) erhalten wir zudem

$$\mathcal{F}[1](x) = \hat{\delta}(x) = 2\pi\delta(-x) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}^{-1}[1](x) = \delta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Eine Aufstellung der Fourier-Transformation verschiedener Funktionen und temperierter Distributionen kann in [37] gefunden werden.

**Bemerkung 2.1.7** Für unsere weiteren Ausführungen sind relevant:

1. Sei  $g(x) \in \mathbb{P}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ , ein Polynom. Mit der Beziehung (2.10) ergibt sich

$$\mathcal{F}_{x,\xi}[g(x)](\xi) = 2\pi g(-i\frac{d}{d\xi})\delta(\xi). \quad (2.13)$$

2. Die Fourier-Transformierte der Indikator-Funktion  $\mathbb{1}_{[x_1, x_2]}(x)$  mit  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  kann durch

$$E(x_1, x_2, \xi) = \int_{x_1}^{x_2} e^{ix\xi} dx = 2h_x e^{i\xi(x_1+h_x)} \text{sinc}(\xi h_x), \quad (2.14)$$

wobei  $h_x = \frac{x_2 - x_1}{2}$ , angegeben werden.

## 2.2 Die Kollokationsmatrizen

Wir betrachten die Einträge der Matrix  $D_\kappa$  aus (2.2)

$$d_{ij}(\kappa) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\kappa r}}{r^3} (i\kappa r - 1) (n_x, x - y_i) \varphi_j(x) dF_x$$

mit  $r = |x - y_i|$ . Die obige Darstellung ergibt sich gerade aus der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{i\kappa|x-y_i|}}{|x-y_i|} = \frac{e^{i\kappa|x-y_i|}}{|x-y_i|^3} (i\kappa|x-y_i| - 1) (n_x, x - y_i).$$

Für die zugehörige inverse Fourier-Transformierte beachten wir

$$\mathcal{F}_{\kappa,\xi}^{-1}[e^{i\kappa r} (i\kappa r - 1)](\xi) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_{\kappa,z}[i\kappa r - 1](z)|_{z=r-\xi}$$

und wenden die Beziehung (2.13) für  $g(\kappa) = i\kappa r - 1$  an. Damit erhalten wir die Matrix  $\check{D}_\xi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , deren Einträge durch

$$\check{d}_{ij}(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{r^3} \left( r \frac{d}{dz} - 1 \right) \delta(z) \Big|_{z=r-\xi} (n_x, x - y_i) \varphi_j(x) dF_x \quad (2.15)$$

für  $i, j = 1, \dots, N$  gegeben sind.

In analoger Weise lässt sich die inverse Fourier-Transformierte der Matrix  $S_\kappa$  aus (2.3) als  $\check{S}_\xi \in \mathbb{R}^{N \times N}$  darstellen mit

$$\check{s}_{ij}(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\delta(\xi - |x - y_i|)}{|x - y_i|} \varphi_j(x) dF_x, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.16)$$

In diesem Fall nutzen wir die Beziehungen

$$\mathcal{F}_{\kappa, \xi}^{-1}[e^{i\kappa|x-y_i|}](\xi) = \mathcal{F}_{\kappa, \xi}^{-1}[1](\xi - |x - y_i|)$$

und (2.12) aus.

**Bemerkung 2.2.1** Die Distribution  $\delta(z)$  mit  $z = |x - y_i| - \xi$  ist auf der Oberfläche einer Kugel  $B(y_i, \xi)$  mit Radius  $\xi$  und Mittelpunkt  $y_i$  konzentriert. Daher kann die zweidimensionale Integration über  $\text{supp } \varphi_j = \{x, \varphi_j(x) \neq 0\}$  auf das eindimensionale Kurvenintegral  $B(y_i, \xi) \cap \text{supp } \varphi_j$  reduziert werden. Im Fall  $\text{supp } \varphi_j \equiv T_{\Delta j}$  (ebenes Dreieckselement) erhalten wir die in Abbildung 2.1 dargestellte Situation.

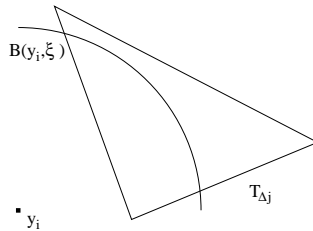


Abbildung 2.1: Integration über  $B(y_i, \xi) \cap T_{\Delta j}$

Darüber hinaus kann  $\xi$  auf dem Intervall  $[0, \text{diam } \Gamma]$  eingeschränkt werden.

### 2.2.1 Die Koordinatentransformation

Wir nehmen die in Bemerkung 1.3.8 dargestellte Situation an, d.h. wir ersetzen die Oberfläche  $\Gamma$  durch die Ersatzoberfläche  $\Gamma_\Delta$  und stellen fest, dass die Kollokationspunkte durch die Schwerpunkte der ebenen Dreieckselemente (Dreiecke)  $T_{\Delta i}$

$$y_i = \frac{1}{3} \left( x_i^{(1)} + x_i^{(2)} + x_i^{(3)} \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.17)$$

gegeben sind. In (2.17) bezeichnen die  $x_i^{(\cdot)} \in \Gamma$  die Eckpunkte des Dreieckselements. Weiter wählen wir stückweise konstante Ansatzfunktionen mit den



Trägerbereichen  $\text{supp } \varphi_j \equiv T_{\Delta j}$ , das heißt

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in T_{\Delta j} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad j = 1, \dots, N = N_{el}.$$

In diesem Fall liegt der Berechnung der Integrale

$$\int_{T_{\Delta j}} \check{k}(x, y_i, \xi) dF_x, \quad y_i \in \Gamma, \quad (2.18)$$

mit den Kernfunktionen

$$\check{k}(x, y, \xi) = \mathcal{F}^{-1}[\partial_{n_x} G(x, y, \kappa)](\xi) \quad \text{bzw.} \quad \check{k}(x, y, \xi) = \check{G}(x, y, \xi) \quad (2.19)$$

im Wesentlichen eine geeignete Koordinatentransformation zugrunde.

Sei  $y'_i = y_i - d \cdot n_x$  der Projektionspunkt des Kollokationspunktes  $y_i$  in die Ebene  $E(T_{\Delta j})$ , die durch das Dreieck  $T_{\Delta j}$  definiert ist.  $d$  bezeichnet den Abstand des Kollokationspunktes zur Ebene. Wir betrachten zunächst die in Abbildung 2.2 dargestellte Situation. Das heißt wir nehmen an, dass der Projektionspunkt mit einem Eckpunkt des Dreiecks zusammenfällt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (OBdA.) gelte  $y'_i = x_j^{(1)}$ .

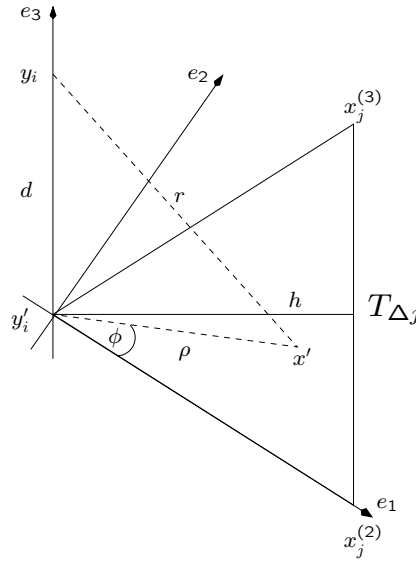


Abbildung 2.2: Koordinatentransformation

Mittels der affinen Abbildung

$$T_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad x \rightarrow x' = Q(x - y'_i), \quad Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

wobei  $Q$  die zugehörige Rotationsmatrix mit  $Q^T = (e_1; e_2; e_3)$  bezeichnet, erhalten wir ein Koordinatensystem, dessen Nullpunkt mit dem Projektionspunkt  $y'_i$  übereinstimmt und die  $e_3$ -Achse entlang der Normalen  $n_x$  der Ebene  $E(T_{\Delta j})$  gerichtet ist. OBdA. wählen wir

$$e_1 = \frac{x_j^{(2)} - x_j^{(1)}}{|x_j^{(2)} - x_j^{(1)}|},$$

und folglich ist  $e_2 = n_x \times e_1$ . Die daraus resultierenden Beziehungen

$$Q(y_i - y'_i) = (0, 0, d)^T \text{ und } Q(x - y'_i) = (x'_1, x'_2, 0) \text{ für alle } x \in T_{\Delta j}$$

ermöglichen die Auswertung der Integrale (2.18) in den reduzierten Koordinaten  $x' = (x'_1, x'_2)$  bzw. in ebenen Polarkoordinaten  $(\rho, \phi)$  mit  $\rho \in [0, \rho_{max}(\phi)]$  und  $\phi \in [0, \Phi_{max}]$ . Dabei bezeichnet  $\rho_{max}(\phi)$  den maximalen Abstand des Dreiecks  $T_{\Delta j}$  zum Nullpunkt in Abhängigkeit des Winkels  $\phi$ , und  $\Phi_{max}$  ist der maximale Winkel zwischen dem Dreieck und der  $e_1$ -Achse.

Dann können wir (2.18) unter Verwendung der Relationen  $r(\phi) = \sqrt{\rho(\phi)^2 + d^2}$  und  $dF_x = \rho d\rho d\phi = r dr d\phi$  darstellen als

$$\int_0^{\Phi_{max}} \int_{|d|}^{r_{max}(\phi)} \check{k}(x'(r, \phi), y'_i, \xi) r dr d\phi. \quad (2.20)$$

Für  $\rho_{max}(\phi)$  erhalten wir

$$\rho_{max}(\phi) = \frac{h}{\cos(\phi - \phi_0)}, \quad \text{wobei } \phi_0 = \arccos \frac{h}{|x_j^{(2)' }|}. \quad (2.21)$$

Die Höhe  $h$  des Dreiecks  $T_{\Delta j}$  ist aus der Abbildung 2.2 ersichtlich.

Im Fall  $\mathcal{F}^{-1}[\partial_{n_x} G]$  lässt sich das auftretende Skalarprodukt  $(n_x, x - y_i)$  gemäß

$$(n_x, x - y_i) = (n_x, x - y'_i - d n_x) = -d \text{ für alle } x \in T_{\Delta j} \quad (2.22)$$

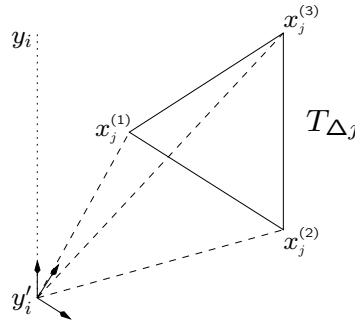
angeben.

Es sei noch bemerkt, dass alle geometrischen Größen explizit von der Wahl des Kollokationspunktes  $y_i$  und des Dreiecks  $T_{\Delta j}$  abhängen. Auf eine Indizierung  $ij$  wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Für den dargestellten Spezialfall lassen sich leicht analytische Ausdrücke für die inversen Fourier-Transformierten der Kollokationsmatrizen  $\check{D}_\xi$  und  $\check{S}_\xi$  angeben, die wir in Abschnitt 2.2.2 ausführlich behandeln.

Im Allgemeinen ist die gegenseitige Lage des Projektionspunktes  $y'_i$  zu dem Dreieckselement  $T_{\Delta_j}$  beliebig. Dass unser Vorgehen dennoch sinnvoll ist, zeigt das folgende Beispiel.

**Beispiel 2.2.2** Für das Integral über dem Dreieck  $T_{\Delta_j}$  gilt



$$\int_{T_{\Delta_j}} = \int_{\Delta_1} + \int_{\Delta_2} - \int_{\Delta_3} \quad (2.23)$$

mit  $\Delta_1 = \Delta y'_i x_j^{(1)} x_j^{(3)}$ ,  $\Delta_2 = \Delta y'_i x_j^{(3)} x_j^{(2)}$   
 und  $\Delta_3 = \Delta y'_i x_j^{(1)} x_j^{(2)}$ ,

wobei jedes Integral auf der rechten Seite der Gleichung (2.23) in der Form (2.20) dargestellt werden kann.

Analog können alle anderen möglichen Fälle behandelt werden.

**Bemerkung 2.2.3** Da sich die eine allgemeine Situation beschreibenden Integrale stets in 3 Integrale des zuvor beschriebenen Typus aufspalten lassen, ist es möglich, alle Integrale (2.18) analytisch zu berechnen.

Es sei noch bemerkt, dass wir die beim Galerkin-Verfahren auftretenden Integrale

$$\int_{T_{\Delta_j}} \int_{T_{\Delta_i}} \check{k}(x, y, \xi) dF_x dF_y$$

mit  $\check{k}$  aus (2.19), nur teilweise analytisch auswerten können. Wird das äußere Integral mittels einer (optimalen) Gauß-Quadratur-Formel angenähert,

$$\approx \sum_l w_l \int_{T_{\Delta_i}} \check{k}(x, y_l, \xi) dF_x,$$

so lassen sich die resultierenden Integrale analog zu oben transformieren.

### 2.2.2 Analytische Darstellung der Matrizen $\check{D}_\xi$ und $\check{S}_\xi$

Wir setzen im Folgenden für  $(y_i, T_{\Delta j})$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ , die in Abschnitt 2.2.1 eingeführte Koordinatentransformation voraus und nehmen den in Abbildung 2.2 dargestellten Spezialfall an.

Um die Integrale (2.20) analytisch anzugeben, definieren wir

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \sqrt{d^2 + h^2}, \\ \xi_{min}^2 &= d^2 + \left( \min(|x_j^{(2)'}|, |x_j^{(3)'}|) \right)^2, \\ \xi_{max}^2 &= d^2 + \left( \max(|x_j^{(2)'}|, |x_j^{(3)'}|) \right)^2,\end{aligned}$$

und die Funktion  $\mathbb{1}_\xi$  gemäß

$$\mathbb{1}_\xi = 2 \cdot \mathbb{1}_{[\xi_0, \xi_{min}]}(\xi) + \mathbb{1}_{(\xi_{min}, \xi_{max})}(\xi). \quad (2.24)$$

Dabei bezeichnen die Größen  $x_j^{(\cdot)'}$  die Eckpunkte des Dreiecks  $T_{\Delta j}$  in den reduzierten Koordinaten.

**Satz 2.2.4** *Mit den oben eingeführten Notationen erhalten wir*

1. *für die Matrix  $\check{D}_\xi$ :*

$$I_{\check{D}_\xi} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{d}{\xi} \delta(\xi - |d|) \Phi_{max} - \beta(\xi) \mathbb{1}_\xi \right) \quad (2.25)$$

mit

$$\beta(\xi) = \frac{d}{\xi^2 - d^2} \frac{h}{\sqrt{\xi^2 - \xi_0^2}}, \quad (2.26)$$

2. *für die Matrix  $\check{S}_\xi$ :*

$$I_{\check{S}_\xi} = \frac{1}{4\pi} (\Phi(\xi) - \alpha(\xi) \mathbb{1}_\xi), \quad (2.27)$$

wobei

$$\alpha(\xi) = \arccos \frac{h}{\sqrt{\xi^2 - d^2}} \quad (2.28)$$

und

$$\Phi(\xi) = \Phi_{max} \mathbb{1}_{[|d|, \xi_{max}]}(\xi) - \alpha(\xi_{min}) \mathbb{1}_{(\xi_{min}, \xi_{max})}(\xi). \quad (2.29)$$

**Beweis. (Herleitung der analytischen Ausdrücke)**

Wir zeigen ausführlich die Herleitung von  $\check{D}_\xi$  und gehen auf  $\check{S}_\xi$  nur kurz ein. Dieses Vorgehen ist sinnvoll, da die Berechnungen sehr analog zu führen sind, wir aber im ersten Fall auf einige wichtige Eigenschaften zu achten haben.

Wir betrachten die Kernfunktion der inversen Fourier-Transformierte  $\check{D}_\xi$  aus (2.15)

$$\check{k}(x, y_i, \xi) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left( r \frac{d}{dz} - 1 \right) \delta(z) \Big|_{z=r-\xi} (n_x, x - y_i), \quad r = |x - y_i|.$$

Mit den Beziehungen  $(n_x, x - y_i) = -d$ ,  $r = z + \xi$  und  $dr = dz$  ergibt sich das Integral (2.20) zu

$$\begin{aligned} I_{\check{D}_\xi} &= -\frac{d}{4\pi} \int_0^{\Phi_{max}} \int_{z_{min}(\phi)}^{z_{max}(\phi)} \left( \frac{\delta'(z)}{(z+\xi)} - \frac{\delta(z)}{(z+\xi)^2} \right) dz d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{d}{\xi} \int_0^{\Phi_{max}} \mathbb{1}'_{[z_{min}(\phi), z_{max}(\phi)]}(z) \Big|_{z=0} d\phi. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Produktregel (2.5) für  $g(z) = (z + \xi)^{-1}$  angewendet und die Definition der Dirac  $\delta$ -Distribution ausgenutzt. Beachten wir außerdem  $\mathbb{1}_{[z_{min}, z_{max}]}(z) = H(z - z_{min}) - H(z - z_{max})$  und  $H'(x) = \delta(x)$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} I_{\check{D}_\xi} &= \frac{1}{4\pi} \frac{d}{\xi} \int_0^{\Phi_{max}} \delta(-z_{min}(\phi)) - \delta(-z_{max}(\phi)) d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{d}{\xi} \Phi_{max} \delta(\xi - |d|) - \frac{1}{4\pi} \frac{d}{\xi} \sum_{k=1}^2 \frac{\mathbb{1}_{[0, \Phi_{max}]}(\phi_k)}{|(-z'_{max}(\phi))|_{\phi=\phi_k}}. \end{aligned}$$

Die letzte Umformung folgt aus (2.6) für  $z_{max}(\phi) = r_{max}(\phi) - \xi$ , wobei  $\phi_k \in [0, \Phi_{max}]$  die  $k$ -te einfache Nullstelle von  $z_{max}(\phi)$  bezeichnet, und der Tatsache, dass die untere Grenze  $z_{min}(\phi) = |d| - \xi$  unabhängig vom Winkel  $\phi$  ist. Insbesondere erhalten wir die Nullstellen

$$\phi_1 = \phi_0 - \arccos \frac{h}{\rho_{max}} \quad \text{und} \quad \phi_2 = \phi_0 + \arccos \frac{h}{\rho_{max}}, \quad (2.30)$$

indem wir  $\rho_{max}(\phi_k) = \sqrt{\xi^2 - d^2}$  und (2.21) beachten.

Die Ableitung  $z'_{max}(\phi) = r'_{max}(\phi)$  ergibt sich unter Anwendung der Kettenregel und (2.21) zu

$$z'_{max}(\phi) = \frac{1}{r_{max}(\phi)} \rho_{max}^2(\phi) \frac{1}{\cot(\phi - \phi_0)}.$$

Wegen  $\arccos(x) = \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  gilt die Darstellung

$$|(-z'_{max}(\phi))|_{\phi=\phi_k}| = \frac{\xi^2 - d^2}{\xi} \frac{\sqrt{\xi^2 - d^2 - h^2}}{h}$$

und somit die Behauptung.

Das Integral (2.20) wird im Fall der inversen Fourier-Transformierte der Matrix  $S_\kappa$  (2.16) zu

$$\begin{aligned} I_{\check{S}_\xi} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\Phi_{max}} \int_{|d|}^{r_{max}} \delta(r - \xi) dr d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi} \Phi_{max}(\xi) - \frac{1}{4\pi} (\phi_2(\xi) - \phi_1(\xi)). \end{aligned}$$

Die letzte Umformung ist eine einfache Konsequenz der Bemerkung 2.1.2. Mittels der Darstellungen (2.30) für  $\phi_{(\cdot)}(\xi)$  und einer kurzen Nebenrechnung erhalten wir die Behauptung. ■

**Folgerung 2.2.5** *Nach Bemerkung 2.2.3 können alle Einträge  $\check{d}_{ij}(\xi)$  der Matrix  $\check{D}_\xi$  beziehungsweise  $\check{s}_{ij}(\xi)$  der Matrix  $\check{S}_\xi$  mit Satz 2.2.4 analytisch angegeben werden.*

Die Darstellungen (2.25) und (2.27) implizieren, dass die so gewählten Elemente auf einem lokalen Trägerbereich, die in  $[|d|, \xi_{max}]$  liegen, konzentriert sind. Daher lässt sich leicht folgern, dass die Matrizen  $\check{D}_\xi$  und  $\check{S}_\xi$  für ein fest gewähltes  $\xi$  schwachbesetzt sind, vgl. auch Bemerkung 2.2.1.

### 2.2.3 Die transformierten Matrizen

Wir geben die Fourier-Transformation ( $\xi \rightarrow \kappa$ ) der Darstellungen aus Satz 2.2.4 an.

**Lemma 2.2.6** *Es sei  $g$  eine auf  $I_\xi = [\xi_0, \xi_{max}]$  (uneigentlich) integrierbare Funktion mit Stammfunktion  $G$ .*

Für die Fourier-Transformierte  $\mathcal{F}[g(\xi)\mathbb{1}_{[\xi_1, \xi_2]}(\xi)](\kappa)$  mit  $\xi_1, \xi_2 \in I_\xi$  gilt dann

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} g(\xi) e^{i\kappa\xi} d\xi = e^{i\kappa\xi_0} G(\xi) \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} g(\xi) (e^{i\kappa\xi} - e^{i\kappa\xi_0}) d\xi.$$

Das zweite Integral der rechten Seite kann wegen  $g(\xi) \cdot (e^{i\kappa\xi} - e^{i\kappa\xi_0}) \in \mathbb{L}_1(I_\xi)$  mittels der gewöhnlichen Gauß-Legendre-Quadratur approximiert werden

$$Q_m(g, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \kappa) = i\kappa e^{i\kappa\xi_0} h_\xi \sum_{k=1}^m w_k \bar{g}(\xi_k) \text{sinc}(\kappa\xi_k) e^{i\kappa\xi_k},$$

wobei  $\bar{g}(\xi) = \xi g(2\xi + \xi_0)$ . Die relevanten Parameter der Quadratur-Formel  $Q_m$  sind durch

$$\xi_k = \bar{\xi} + h_\xi x_k, \quad h_\xi = \frac{\xi_1 - \xi_2}{4} \quad \text{und} \quad \bar{\xi} = \frac{\xi_2 + \xi_1 - 2\xi_0}{4}$$

gegeben,  $x_k$  bezeichnen die Nullstellen der Legendre-Polynome  $P_m$  der Ordnung  $m$  und  $w_k$  sind die zugehörigen Gewichte, vgl. [2].

**Beweis.** Die Quadraturformel ergibt sich durch einfache Rechnungen mit der Substitution  $\xi \rightarrow 2\xi + \xi_0$ . ■

Es sei  $\xi \in [\xi_0, \xi_{\max}]$  beliebig. Für die Funktion  $\beta(\xi)$  aus (2.26) stellen wir fest:

1.  $\beta(\xi)$  besitzt an der Stelle  $\xi = \xi_0$  eine Singularität und ist auf  $[\xi_0, \xi_{\max}]$  uneigentlich integrierbar mit der Stammfunktion

$$\gamma(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \arctan \left( \frac{\xi_0^2 + d\xi}{h\sqrt{\xi^2 - \xi_0^2}} \right) - \arctan \left( \frac{\xi_0^2 - d\xi}{h\sqrt{\xi^2 - \xi_0^2}} \right) \right) \\ 0 \text{ für } \xi = \xi_0 \end{cases} \quad (2.31)$$

2. Aufgrund

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{e^{i\kappa\xi} - e^{i\kappa\xi_0}}{\xi - \xi_0} = i\kappa e^{i\kappa\xi_0} \quad \text{gilt} \quad \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \beta(\xi) (e^{i\kappa\xi} - e^{i\kappa\xi_0}) = 0,$$

$$\text{d.h. } \beta(\xi) \cdot (e^{i\kappa\xi} - e^{i\kappa\xi_0}) \in \mathbb{L}_1([\xi_0, \xi_{\max}]).$$

Damit erfüllt die Funktion  $\beta(\xi)$  insbesondere für das Intervall  $\mathbb{I}_\xi$  aus (2.24) die Voraussetzungen von Lemma 2.2.6. Zusammen mit der Definition der Dirac  $\delta$ -Distribution  $\delta(\xi - |d|)$  ergibt sich die Fourier-Transformierte der Darstellung (2.25) zu

$$I_{D_\kappa} = \frac{1}{4\pi} \left( \operatorname{sgn}(d) \Phi_{\max} e^{i\kappa|d|} - (\gamma(\xi_{\max}) + \gamma(\xi_{\min})) e^{i\kappa\xi_0} - 2 Q_m(\beta, \xi_0, \xi_0, \xi_{\min}, \kappa) - Q_m(\beta, \xi_0, \xi_{\min}, \xi_{\max}, \kappa) \right). \quad (2.32)$$

In analoger Weise wenden wir das Lemma 2.2.6 auf die Funktion  $\alpha(\xi)$  aus (2.28) an. Dabei ist für  $\xi \in [\xi_0, \xi_{\max}]$  die zugehörige Stammfunktion durch

$$\sigma(\xi) = \xi \alpha(\xi) - h \log \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - \xi_0^2} \right) - d \gamma(\xi)$$

mit  $\gamma(\xi)$  aus (2.31) gegeben.

Da sich die Fourier-Transformierte jedes Summanden der Funktion  $\Phi(\xi)$  aus (2.29) mit Hilfe der Beziehung (2.14),  $\mathcal{F}[\mathbb{I}_{[\xi_1, \xi_2]}(\xi)](\kappa) = E(\xi_1, \xi_2, \kappa)$ , darstellen lässt, erhalten wir

$$\hat{\Phi}(\kappa) = \Phi_{\max} E(|d|, \xi_{\max}, \kappa) - \alpha(\xi_{\min}) E(\xi_{\min}, \xi_{\max}, \kappa)$$

und somit ergibt sich für die Fourier-Transformierte der Funktion  $I_{S_\xi}$  aus (2.27)

$$I_{S_\kappa} = \frac{1}{4\pi} \left( \hat{\Phi}(\kappa) - (\sigma(\xi_{\max}) + \sigma(\xi_{\min}) - 2\sigma(\xi_0)) e^{i\kappa\xi_0} - 2 Q_m(\alpha, \xi_0, \xi_0, \xi_{\min}, \kappa) - Q_m(\alpha, \xi_0, \xi_{\min}, \xi_{\max}, \kappa) \right). \quad (2.33)$$

### Bemerkung 2.2.7

1. Die Funktionen  $\beta$  und  $\gamma$  aus (2.32) beziehungsweise  $\alpha$  und  $\sigma$  aus (2.33) sind unabhängig von der Wellenzahl  $\kappa$ . Daher genügt es, sie einmal zu berechnen und einen Datensatz zu erstellen. Für die Generierung der Funktionen  $I_{D_\kappa}$  und  $I_{S_\kappa}$  zu den verschiedenen Wellenzahlen  $\kappa \leq \kappa_{\max}$  kann dann stets auf diese vorhandenen Daten zurückgegriffen werden.
2. Aus den Darstellungen (2.32) und (2.33) lassen sich leicht analytische Ausdrücke für den Fall  $\kappa = 0$  ableiten.

Zusammenfassend erhalten wir für das Gleichungssystem (2.1) den folgenden Satz

---



**Satz 2.2.8** *Wenden wir auf das Gleichungssystem*

$$A_\kappa \nu \equiv \left( \frac{1}{2}I + D_\kappa + i\eta S_\kappa \right) \nu = b \quad (2.34)$$

*die Fourier-Methode an, so können die Einträge der Kollokationsmatrizen  $D_\kappa, S_\kappa \in \mathbb{C}^{N \times N}$  gemäß der Bemerkung 2.2.3 als Kombination der Darstellung (2.32) für  $d_{ij}(\kappa)$  beziehungsweise (2.33) für  $s_{ij}(\kappa)$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ , angegeben werden. Insbesondere gilt  $d_{ii}(\kappa) = 0$ .*

In [61] ist die Fourier-Methode für die Matrix  $S_\kappa$  ausführlich behandelt. Im Gegensatz zu den obigen Ausführungen wird dort die Fourier-Transformierte  $\mathcal{F}_{\xi, \kappa}[\check{s}_{ij}(\xi) \mathbb{1}_{\text{supp } \check{s}_{ij}}](\kappa)$  mittels einer Summe stückweiser konstanter Splines approximiert. Die Güte dieses Verfahrens hängt jedoch entscheidend von der geeigneten Wahl der Stützstellen und der Anzahl der Splines ab. Dadurch werden gegebenenfalls für komplexe Geometrien einzelne Einträge schlecht approximiert. Während sich dieser Effekt bei der vollständigen Matrixgenerierung nicht auf die Güte der Lösungen auswirkt, eignet sich diese Methode nicht in Verbindung mit den im nächsten Kapitel vorgestellten Approximationsmethoden. Darüber hinaus kann der Fall  $\kappa = 0$  nicht exakt dargestellt werden.



### 3 Approximationsmethoden

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die vorgestellten linearen Gleichungssysteme aus Abschnitt 1.3.3 effizient zu lösen. Es ist bekannt, dass die zugehörigen Matrizen für jede Wellenzahl  $0 \leq \kappa \leq \kappa_{max}$  in den auftretenden Gleichungssystemen vollbesetzt und unstrukturiert sind.

Interessieren wir uns für  $N_\kappa$  verschiedene Wellenzahlen, so würden direkte Lösungsverfahren wie die LR-Zerlegung  $O(N_\kappa N^3)$  Operationen benötigen, wobei  $N$  die Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet. Daher werden zur Lösung großdimensionierter Probleme üblicherweise iterative Verfahren wie das CG-, QMR- oder GMRES-Verfahren verwendet, bei denen die Systemmatrix bzw. die Adjungierte nur in die Matrix-Vektor-Multiplikation eingehen. Eine Übersicht über diese Verfahren findet der interessierte Leser in [64] oder [75] (speziell GMRES in [76]). Eine naive Herangehensweise, d.h. jeder Eintrag der Matrix wird berechnet und die gewöhnliche Matrix-Vektor-Multiplikation verwendet, erfordert jedoch wiederum einen Aufwand für das Aufstellen der Matrix und für die Multiplikation von je  $O(N^2)$  Einheiten für jede Wellenzahl.

In den letzten zwanzig Jahren wurden mehrere Approximationsmethoden vollbesetzter Matrizen sowie entsprechende Realisierungen der Matrix-Vektor-Multiplikation mit nahezu linearer Komplexität entwickelt.

Nach der Bereitstellung der notwendigen Grundlagen und Erzeugung einer hierarchischen Zerlegung der Matrix geben wir einen kurzen Überblick der heute relevanten schnellen (Summations-)Verfahren. Während das Multipol- und das Panel-Clustering-Verfahren speziell für die Helmholtz-Gleichung weiterentwickelt wurden, passen wir hier erstmals die von Rjasanow und Beben-dorf eingeführte Methode [10], [13] zur blockweisen Niedrigrang-Approximation von Matrizen, die durch asymptotisch glatte Kerne erzeugt werden, formal auf die Kollokationsmatrizen  $A_\kappa$  aus Abschnitt 2.2 an.

---

Wir betrachten im Folgenden eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , die durch einen Kern  $k : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  (bzw.  $k : \Gamma_\Delta \times \Gamma_\Delta \rightarrow \mathbb{C}$ ) der Form

$$k(x, y) = \mu_1 G(x, y, \kappa) + \mu_2 \frac{\partial}{\partial n_x} G(x, y, \kappa) \quad (3.1)$$

mit  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$  erzeugt wird, d.h.

$$a_{ij} = \int_{\Gamma} k(x, y_i) \varphi_j(x) dF_x, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

**Beispiel 3.1** Im Fall  $n = m = N$ ,  $\mu_1 = i\eta$  und  $\mu_2 = 1$ ,  $\eta \in \mathbb{R}$ , entspricht die Matrix  $A$  gerade der Kollokationsmatrix  $A_\kappa$  aus (2.34). Wir bemerken

$$a_{ii} = \frac{1}{2} + i\eta \int_{\Gamma} G(x, y_i, \kappa) \varphi_i(x) dF_x.$$

### 3.1 Grundlegende Definitionen

Die grundlegende Idee aller Approximationsverfahren basiert darin, die Kernfunktion  $k(x, y)$  durch degenerierte Kerne zu approximieren.

**Definition 3.1.1** Seien die Funktionen  $f_l, g_l : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  für  $l = 1, \dots, p$  und  $p \in \mathbb{N}$  gegeben. Ein Kern  $k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  heißt degeneriert, wenn er sich als eine endliche Summe von sogenannten Funktional-Skeletonen  $f_l(x)g_l(y)$  schreiben lässt,

$$k_p(x, y) = \sum_{l=1}^p f_l(x)g_l(y).$$

Die Darstellungen der Funktional-Skeletone können auf unterschiedliche Weise gefunden werden.

Eine explizite Kernapproximation für  $G(x, y, \kappa)$  mit  $\kappa > 0$  aus (1.6) kann mit Hilfe des folgenden Satzes, der in [23] bewiesen ist, angegeben werden.

**Satz 3.1.2** Seien  $x, y \in \mathbb{R}^3$  mit  $\hat{x} = x/|x|$  und  $\hat{y} = y/|y|$ . Für  $|x| > |y|$  gilt

$$G(x, y, \kappa) = \frac{i\kappa}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\hat{x} \cdot \hat{y}) h_l^{(1)}(\kappa|x|) j_l(\kappa|y|) \quad (3.2)$$

$$= i\kappa \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\hat{x}) \overline{Y_l^m(\hat{y})} h_l^{(1)}(\kappa|x|) j_l(\kappa|y|). \quad (3.3)$$

Die Reihe und die der termweisen ersten Ableitungen bezüglich  $x$  und  $y$  konvergieren absolut und gleichmäßig auf allen Teilmengen mit  $|x| > |y|$ .

In den Darstellungen (3.2) und (3.3) bezeichnen  $Y_l^m$  die Kugelflächenfunktionen mit  $m = -l, \dots, l$ ,  $j_l$  die sphärische Besselfunktionen,  $h_l^{(1)}$  die sphärische Hankelfunktionen 1. Art und  $P_l$  die Legendre-Polynome der Ordnung  $l \in \mathbb{N}_0$ . Eine Zusammenfassung der wichtigsten Definitionen und Eigenschaften dieser speziellen Funktionen ist im Anhang zu finden.

Wir approximieren die Kernfunktion durch die ersten  $p \in \mathbb{N}$  Terme der Darstellung (3.3) und erhalten die folgende Fehlerabschätzung.

**Satz 3.1.3** *Seien  $x, y \in \mathbb{R}^3$  mit  $\nu = |y|/|x| \leq \nu_0 < 1$ . Dann gilt*

$$|G(x, y, \kappa) - G_p(x, y, \kappa)| \leq c \frac{e^{\kappa|x|}}{|x|} p^{3/2} \nu^p,$$

wobei

$$G_p(x, y, \kappa) = \frac{i\kappa}{4\pi} \sum_{l=0}^{p-1} (2l+1) P_l(\hat{x} \cdot \hat{y}) h_l^{(1)}(\kappa|x|) j_l(\kappa|y|)$$

und die Konstante  $c$  nur von  $\nu_0$  abhängt.

**Beweis.** Sei  $p \in \mathbb{N}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} |G(x, y, \kappa) - G_p(x, y, \kappa)| &= \frac{\kappa}{4\pi} \left| \sum_{l=p}^{\infty} (2l+1) P_l(\hat{x} \cdot \hat{y}) h_l^{(1)}(\kappa|x|) j_l(\kappa|y|) \right| \\ &\leq \frac{\kappa}{4\pi} \sum_{l=p}^{\infty} |\gamma_l| \end{aligned}$$

mit

$$\gamma_l = (2l+1) h_l^{(1)}(r) j_l(z), \quad r = \kappa|x|, \quad z = \kappa|y|.$$

Hier wurde  $|P_l(t)| \leq 1$  für  $|t| \leq 1$  ausgenutzt. Um  $\gamma_l$  abzuschätzen, bemerken wir zunächst

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^l \frac{1}{\Gamma(l+1)} \int_0^1 (1-t^2)^l \cos zt \, dt.$$

Mit  $|\cos zt| \leq 1$  und der Beziehung

$$\int_0^1 (1-t^2)^l \, dt = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+3/2)}$$

ergibt sich

$$|j_l(z)| \leq \left(\frac{z}{2}\right)^l \frac{\sqrt{\pi}}{(2l+1)\Gamma(l+1/2)}.$$

Diese Darstellung spiegelt das asymptotische Verhalten für große Indizes  $l$  wider.

In analoger Weise gilt

$$h_l^{(1)}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} H_{l+1/2}^{(1)}(r) = \frac{1}{r} \frac{e^{i(r+l\pi/2)}}{\Gamma(l+1)} \int_0^\infty e^{-t} t^l \left(1 + \frac{it}{2r}\right)^l dt.$$

Nutzen wir die Beziehungen

$$\left| \left(1 + \frac{it}{2r}\right)^l \right| \leq \left(1 + \frac{t}{2r}\right)^l = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \frac{t^k}{(2r)^k}$$

und  $\int_0^\infty e^{-t} t^{l+k} dt = \Gamma(l+k+1)$  aus, so erhalten wir die Abschätzung

$$|h_l^{(1)}(r)| \leq \frac{1}{r} g_l\left(\frac{1}{2r}\right) \quad \text{mit} \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+1)} x^k, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

In [41] ist gezeigt, daß für alle  $x > 0$  gilt

$$|g_n(x)| \leq c(4x)^n \Gamma(n+1) n e^{\frac{1}{2x}}, \quad \text{wobei } c > 0. \quad (3.4)$$

Zum besseren Verständnis wiederholen wir die wichtigsten Ergebnisse des Beweises von (3.4).

Dazu bemerken wir, dass für  $g_n(x)$  die Rekursion  $g_0(x) = 1$ ,  $g_1(x) = 1 + 2x$  und  $g_n(x) = 2x(2n-1)g_{n-1}(x) + g_{n-2}(x)$ ,  $n \geq 2$ , gültig ist.

Wir betrachten im Folgenden die Potenzreihe

$$Q(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \frac{w^n}{n!},$$

die für  $|w| < \varepsilon$  absolut konvergiert. Insbesondere gilt für die Ableitungen von  $Q$  bzgl.  $w$

---

$$Q'(x, w) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \frac{w^{(n-1)}}{(n-1)!} \quad \text{und} \quad Q''(x, w) = \sum_{n=2}^{\infty} g_n(x) \frac{w^{(n-2)}}{(n-2)!}.$$

Ersetzen wir in der zweiten Ableitung die Funktion  $g_n$  mittels der Rekursionsformel, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$vQ'' - 6xQ' - Q = 0, \quad v = 1 - 4xw.$$

Mit  $Q(x, 0) = g_0(x) = 1$  und  $Q'(x, 0) = g_1(x) = 1 + 2x$  können wir die Lösung explizit angeben

$$Q = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{\frac{1-\sqrt{v}}{2x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \frac{(v-1)^n}{n!}.$$

Andererseits betrachten wir für  $Q$  die Potenzreihe, die für  $|v-1| \leq |4x|\varepsilon = \delta$  absolut konvergiert. In [41] wird gezeigt, dass sich die Koeffizienten einer konvergenten Reihe wie folgt abschätzen lassen,

$$|\pi_n| \leq n! \left( \frac{1}{v-1} \right)^n \frac{1}{\sqrt{v}} e^{\frac{1-\sqrt{v}}{2x}}, \quad |v-1| \leq \delta.$$

Nutzen wir die Identität der Koeffizienten aus, d.h. mit  $v-1 = -4xw$  gilt  $g_n(x) = (-4x)^n \pi_n$ , dann erhalten wir mit der Wahl  $v = 1/n^2$  für  $n > 1$  die Abschätzung  $|(v-1)^{-n} e^{\sqrt{v}}| < c$ , und somit (3.4).

Um den Beweis des Satzes 3.1.3 abzuschließen, beachten wir noch das Verhalten

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+1/2)} < \sqrt{l}, \quad l \geq 1.$$

So ergibt sich

$$|\gamma_l| \leq c l \sqrt{l} \frac{e^r z^l}{r^l}.$$

und die Behauptung folgt mit  $z < r$ . ■

**Folgerung 3.1.4** *Für die ersten Ableitungen der Kernfunktion  $G(x, y, \kappa)$  bezüglich  $x$  und  $y$  gelten*

$$\begin{aligned} |\operatorname{grad}_x G(x, y, \kappa) - \operatorname{grad}_x G_p(x, y, \kappa)| &\leq c_1 \frac{e^{\kappa|x|}}{|x|^2} p^{5/2} \nu^p \\ |\operatorname{grad}_y G(x, y, \kappa) - \operatorname{grad}_y G_p(x, y, \kappa)| &\leq c_2 \frac{e^{\kappa|y|}}{|y|^2} p^{5/2} \nu^p \end{aligned}$$

wobei die Konstanten  $c_1, c_2$  jeweils nur von  $\nu_0$  abhängen.

---

**Beweis.** Der Beweis läuft analog zu dem des Satzes 3.1.3.

Wir bemerken noch für  $q_l = h_l^{(1)}$  bzw.  $q_l = j_l$  (vgl. Anhang und [2])

$$\operatorname{grad}_x (q_l(\kappa|x|)P_l(\hat{x} \cdot \hat{y})) = \kappa \hat{x} q'_l(\kappa|x|)P_l(\hat{x} \cdot \hat{y}) + \kappa \frac{q_l(\kappa|x|)}{\kappa|x|} P_l^{(1)}(\hat{x} \cdot \hat{y})$$

$$\text{und} \quad q'_l(z) = \frac{l}{z} q_l(z) - q_{l+1}(z), \quad z = \kappa|x|.$$

Weiter gilt  $|P_l^{(1)}(t)| \leq \pi(l+1)$  für  $|t| \leq 1$ . ■

Im Fall  $\kappa = 0$  erhalten wir ein analoges Ergebnis, d.h. für  $x, y \in \mathbb{R}^3$  mit  $|x| > |y|$  gilt

$$\left| \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} - G_p(x, y, 0) \right| \leq \frac{1}{|x|} \frac{\nu^p}{1-\nu^p}$$

mit  $G_p(x, y, 0) = \frac{1}{|x|} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{|x|^l}{|y|^l} P_l(\hat{x} \cdot \hat{y}).$

Eine wichtige Eigenschaft der oben charakterisierten Kerne  $k$  besteht darin, dass sich die Approximierbarkeit auf die der von  $k$  erzeugten Matrizen überträgt. Wir werden die Matrizen durch sogenannte Niedrigrang-Matrizen approximieren, weil diese eine kompakte Speicherung sowie eine effiziente Matrix-Vektor-Multiplikation zulassen.

Jede Matrix  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  mit Rang  $p$  kann in der Form

$$A = UV^*, \quad U \in \mathbb{C}^{m \times p}, \quad V \in \mathbb{C}^{n \times p}, \quad (3.5)$$

dargestellt werden. In dieser Darstellung sind zur Speicherung der Einträge statt der üblichen  $mn$  nur  $p(m+n)$  Speichereinheiten notwendig und für die Matrix-Vektor-Multiplikation  $w = Av$  mit  $v \in \mathbb{C}^n$  werden nur  $O(p(m+n))$  Operationen benötigt,

$$Op(z = V^*v) = O(pn) \quad \text{und} \quad Op(w = Uz) = O(pm).$$

Daher ist die Verwendung der Zerlegung für  $p(m+n) < mn$  sinnvoll und reduziert für ein von  $n$  und  $m$  unabhängiges  $p$  eine Komplexitätsordnung.

**Satz 3.1.5** *Seien  $G_1, G_2$  zwei Untermengen von  $\mathbb{R}^3$ , so dass  $y_i \in G_2$  und  $\Phi_j = \operatorname{supp} \varphi_j \subset G_1$  für  $i = 1, \dots, m$  und  $j = 1, \dots, n$  gilt. Weiter sei  $k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  ein auf  $G_1 \times G_2$  beschränkter Integrationskern, der die Matrix  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  mit*

$$a_{ij} = \int_{G_1} k(x, y_i) \varphi_j(x) dF_x, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$



erzeugt. Für diesen existiere ein degenerierter Kern  $k_p$ , so dass

$$|k(x, y) - k_p(x, y)| \leq \varepsilon_p |k(x, y)| \quad \text{für } x \in G_1, y \in G_2,$$

gilt.

Dann ist die durch  $k_p$  erzeugte Matrix  $\tilde{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  mit

$$\tilde{a}_{ij} = \int_{G_1} k_p(x, y_i) \varphi_j(x) dF_x, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

höchstens von Rang  $p$  und es gilt

$$\|A - \tilde{A}\|_F \leq \varepsilon_p \sqrt{m} \sup_{x \in G_1} \sup_{y \in G_2} |k(x, y)| \left( \sum_{j=1}^n \mu^2(\Phi_j) \right)^{1/2}, \quad c > 0.$$

**Beweis.** Seien  $f_l, g_l, l = 1, \dots, p$ , die Funktional-Skeletone des Kerns  $k_p$ . Wir bemerken

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{l=1}^p \int_{G_1} f_l(x) g_l(y_i) \varphi_j(x) dF_x = \sum_{l=1}^p g_l(y_i) \int_{G_1} f_l(x) \varphi_j(x) dF_x.$$

Mit

$$\begin{aligned} u_{il} &= g_l(y_i), \quad i = 1, \dots, m, \\ v_{jl} &= \int_{G_1} f_l(x) \varphi_j(x) dF_x, \quad j = 1, \dots, n, l = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

lässt sich die Matrix  $\tilde{A}$  als  $\tilde{A} = UV^*$  mit  $U \in \mathbb{C}^{m \times p}$  und  $V \in \mathbb{C}^{n \times p}$  darstellen, d.h.  $\text{rank } \tilde{A} \leq p$ .

Weiter erhalten wir mit  $\Phi_j = \text{supp } \varphi_j$

$$\begin{aligned} |a_{ij} - \tilde{a}_{ij}| &= \left| \int_{\Phi_j} (k(x, y_i) - k_p(x, y_i)) dF_x \right| \\ &\leq \int_{\Phi_j} |k(x, y_i) - k_p(x, y_i)| dF_x \\ &\leq \varepsilon_p \int_{\Phi_j} |k(x, y_i)| dF_x \\ &\leq \varepsilon_p \sup_{x \in G_1} \sup_{y \in G_2} |k(x, y)| \mu(\Phi_j). \end{aligned}$$


---

Die Behauptung ergibt sich mit der Frobenius-Norm

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \quad \blacksquare$$

Die Kernfunktion aus (3.1) besitzt nur für  $x = y$  eine Singularität und ist auf geeigneten Mengen  $G_1 \times G_2$  beschränkt. Eine Bedingung, die wir an die Mengen stellen, ist die sogenannte  $\eta^*$ -Zulässigkeit.

**Definition 3.1.6** Seien  $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^3$  zwei beschränkte Mengen. Dann heißt das Paar  $(G_1, G_2)$   $\eta^*$ -zulässig, wenn gilt

$$\max(\text{diam}(G_1), \text{diam}(G_2)) \leq \eta^* \text{dist}(G_1, G_2), \quad 0 < \eta^* < 1. \quad (3.6)$$

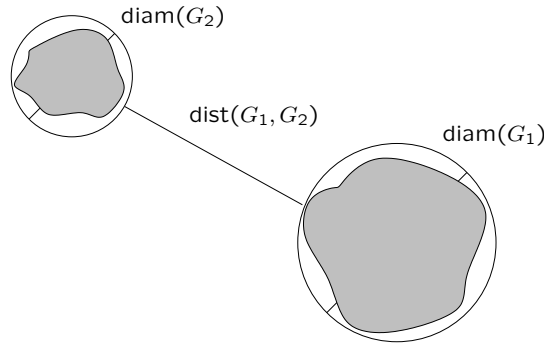


Abbildung 3.1:  $\eta^*$ -Zulässigkeit

Dabei ist wie üblich  $\text{dist}(X, Y) = \inf\{|x - y|, x \in X, y \in Y\}$ .

Wir betrachten nun noch eine bestimmte Klasse von Kernfunktionen, die ein gewisses Abklingverhalten für große Abstände  $|x - y|$  besitzen.

**Definition 3.1.7** Eine Kernfunktion  $k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  heißt asymptotisch glatt bezüglich  $y$ , wenn sie für  $y \neq x$  bzgl.  $y$  unendlich oft differenzierbar ist und für jeden Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$|D_y^\alpha k(x, y)| \leq c_p |x - y|^{q-p}, \quad p = |\alpha|.$$

Dabei hängt  $c_p$  nur von  $p$  ab und  $D^\alpha$  aus (1.5), vgl. [16].

Diese Voraussetzung wird so oder in ähnlicher Form in vielen Approximationsverfahren, wie für die  $\mathcal{H}$ -Matrizen [48] oder das ACA-Verfahren [10], getroffen. Darüber hinaus können asymptotisch glatte Kerne durch degenerierte Kerne approximiert werden. Der folgende Satz ist in [11] gezeigt.

**Satz 3.1.8** *Sei  $k$  ein auf dem  $\eta^*$ -zulässiges Paar  $(G_1, G_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  mit einer konvexen Menge  $G_2$  asymptotisch glatter Kern. Dann existiert zu  $k$  und  $q < p \in \mathbb{N}$  ein degenerierter Kern  $k_{n_p}$ , so dass für  $x \in G_1$  und  $y \in G_2$  gilt*

$$|k(x, y) - k_{n_p}(x, y)| \leq \frac{c_p}{p!} (\eta^*)^p \text{dist}^q(G_1, G_2). \quad (3.7)$$

*Dabei ist  $n_p = (p+1)(p+2)/2$  die Dimension des Raums der Polynome  $\mathbb{P}^{p-1}(\mathbb{R}^3)$ .*

In diesem Zusammenhang bemerken wir für die Kernfunktionen  $G(x, y, \kappa)$  bzw.  $\partial_n G(x, y, \kappa)$  mit  $\kappa \geq 0$  folgendes:

**Bemerkung 3.1.9**

1. *Im Fall  $\kappa > 0$  gilt die Umkehrung des Satzes 3.1.8 nicht. Denn  $G(x, y, \kappa)$  und  $\partial_n G(x, y, \kappa)$  sind nicht asymptotisch glatt, lassen sich aber nach Satz 3.1.3 durch degenerierte Kerne approximieren.*
2. *In [85] wird gezeigt, dass der Kern  $G(x, y, \kappa)$  für  $\kappa = 0$  asymptotisch glatt ist. Es gilt*

$$|D_y^\alpha G(x, y, 0)| \leq \frac{1}{4\pi} \frac{4^p p!}{|x - y|^{p+1}}, \quad p = |\alpha|.$$

Um die angeführten Überlegungen auf die Matrizen aus Abschnitt 1.3.3 anzuwenden, fassen wir die Mengen  $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^3$  als Vereinigung sich überlappender Mengen  $\Phi_l, l \in \mathcal{J}_1$  bzw.  $l \in \mathcal{J}_2$  auf,

$$G_1 = \bigcup_{j \in \mathcal{J}_1} \Phi_j \quad \text{und} \quad G_2 = \bigcup_{i \in \mathcal{J}_2} \Phi_i,$$

wobei  $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$  Indexmengen und  $\Phi_j, j = 1, \dots, N$ , die Trägermengen der Ansatzfunktionen  $\varphi_j$  sind. Im Fall des Kollokationsverfahrens ist  $y_i$  der Kollokationspunkt zur Trägermenge  $\Phi_i, i = 1, \dots, N$ . Betrachten wir den Kern aus (3.1) und wählen ein  $\eta^*$ -zulässiges Paar  $(G_1, G_2)$ , dann kann nach den Sätzen 3.1.3 und 3.1.5 der Block, der durch die Permutation der Zeilen  $\mathcal{J}_2$  und Spalten  $\mathcal{J}_1$  entsteht, durch Niedrigrang-Matrizen approximiert werden.

Da das Paar  $(\Gamma, \Gamma)$  bzw.  $(\Gamma_\Delta, \Gamma_\Delta)$  offensichtlich die  $\eta^*$ -Zulässigkeit nicht erfüllt, können wir die Approximierbarkeit der gesamten Systemmatrix durch Niedrigrang-Matrizen nicht erwarten. Mittels einer geeigneten Zerlegung des Berechnungsgebietes in  $\eta^*$ -zulässige Paare von Mengen können jedoch die entsprechenden Untermatrizen (Blöcke) gemäß dieser Zerlegung partitioniert und approximiert werden.

## 3.2 Die Matrix-Partitionierung

Wir betrachten das Berechnungsgebiet  $\Gamma_\Delta \times \Gamma_\Delta$  aus Bemerkung 1.3.8 und ordnen jeder Trägermenge  $\Phi_i$  den entsprechenden Kollokationspunkt  $y_i$  als charakteristischen Punkt zu. Die Mengen

$$G_t = \bigcup_{i \in t} \Phi_i$$

werden auch als Cluster und die Indexmengen  $t \subseteq \mathcal{J}$  mit  $\mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$  als Index-Cluster bezeichnet. Für jedes Cluster definieren wir ein sogenanntes Cluster-Zentrum  $z_t$ , welches sich im Fall  $\text{supp } \varphi_i \equiv T_{\Delta_i}$  zu

$$z_t = \frac{1}{w_t} \sum_{i \in t} w_i y_i, \quad w_t = \sum_{i \in t} w_i \text{ und } w_i = \mu(T_{\Delta_i})$$

ergibt, und einen Cluster-Radius  $r_t$ , so dass  $B(z_t, r_t)$  die kleinste Kugel ist, die das Cluster  $G_t$  enthält.

**Definition 3.2.1** *Ein Index-Cluster-Paar  $(t_1, t_2)$  mit  $t_1, t_2 \subseteq \mathcal{J}$  heißt  $\eta^*$ -zulässig, wenn  $\min(\#t_1, \#t_2) > 1$  und das Paar  $(G_{t_1}, G_{t_2})$   $\eta^*$ -zulässig gemäß Definition 3.1.6 ist.*

*Dabei bezeichnet  $\#X$  die Anzahl der Elemente der Menge  $X$ .*

Im Folgenden verallgemeinern wir die in Abschnitt 3.1 dargestellte Situation, einen aus den Zeilen  $t_2$  und Spalten  $t_1$  bestehenden Block der Matrix  $A$  durch Niedrigrang-Matrizen zu approximieren, indem wir die Index-Menge  $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$  in paarweise disjunkte Mengen  $Z' = \{(t_1, t_2), t_1, t_2 \in \mathcal{J}\}$  so zerlegen,

$$\mathcal{J} \times \mathcal{J} = \bigcup_{(t_1, t_2) \in Z'} t_1 \times t_2,$$

dass für jedes Index-Cluster-Paar  $(t_1, t_2) \in Z'$  entweder  $\min(\#t_1, \#t_2) = 1$  gilt oder es  $\eta^*$ -zulässig ist.

Die Konstruktion einer solchen Zerlegung wird hierarchisch durch die Erzeugung eines Index-Cluster-Baumes und die Bestimmung der zulässigen Index-Cluster-Paare erfolgen.

In der folgenden Definition (siehe [48], [50]) eines Index-Cluster-Baumes verwenden wir für die Menge der Söhne  $S(t)$  eines Knoten  $t \in T_{CL}$  die Bezeichnung

$$S(t) = \{s \in T_{CL}, s \subset t, s \neq t \text{ (d.h. } s \text{ ist Sohn von } t)\}$$

und für die Menge der Blätter  $L(T_{CL})$  des Baums  $T_{CL}$

$$L(T_{CL}) = \{t \in T_{CL} \mid S(t) = \emptyset\}.$$

**Definition 3.2.2** Sei  $\mathcal{J}$  eine endliche Indexmenge.

Ein Baum  $T_{CL} = T_{CL}(\mathcal{J})$  heißt Index-Cluster-Baum, falls gelten

1.  $\mathcal{J} \in T_{CL}$
2. für einen Knoten  $t \in T_{CL}$  mit  $S(t) \neq \emptyset$  enthält  $S(t)$  paarweise disjunkte Untermengen  $s \in S$  mit

$$t = \bigcup_{s \in S(t)} s$$

3.  $\#S(t) \neq 1$  für  $t \in T_{CL}$ .

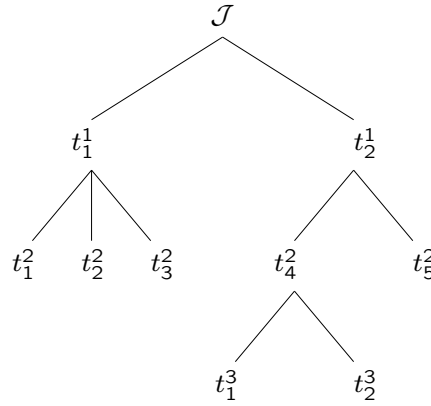


Abbildung 3.2: Cluster-Baum

**Bemerkung und Definition 3.2.3** Sei  $\tau = 0, \dots, \tau_{max}$ .

Unter der Tiefe  $\tau$  eines Index-Clusters im Baum  $T_{CL}$  verstehen wir seinen Abstand zur Wurzel  $\mathcal{J}$ , wobei  $\tau_{max}$  die maximale Tiefe angibt. Wir bezeichnen mit  $t^\tau$  alle Index-Cluster  $t \in T_{CL}$  der Tiefe  $\tau$  und fassen  $Z^{(\tau)} = \{t^\tau\}$  als Zerlegung der Tiefe  $\tau$  auf.

Ist die Abbildung  $S$  gegeben, die jeder Indexmenge  $t \subseteq \mathcal{J}$  die Menge  $S(t)$  zuordnet, dass  $\#S(t) \neq 1$  und  $t = \bigcup_{s \in S(t)} s$  gelten, so können wir ausgehend von  $\mathcal{J}$  einen Index-Cluster-Baum generieren. Wir nehmen an, dass die Auswertung von  $S(t)$  von der Größenordnung  $O(\#t)$  sei. In [11] sind mögliche Abbildungen explizit angegeben.

**Algorithmus 3.2.4 (Generierung des Index-Cluster-Baumes)**

Setze  $T_{CL} = \emptyset$  und rufe  $\text{Baum}(\mathcal{J}, T_{CL})$  auf, wobei  $\text{Baum}(t, T_{CL})$  für  $t \in \mathcal{J}$  die folgende rekursive Routine ist.

*Routine  $\text{Baum}(t, T_{CL})$*

1.  $T_{CL} := T_{CL} \cup \{t\}$

2. Falls  $\#t > 1$

Rufe für alle  $s \in S(t)$  die Routine  $\text{Baum}(s, T_{CL})$  auf.

Nehmen wir  $\#t/\#s > R > 1$  mit  $\#t = \sum_{s \in S} \#s$  an, dann ist die maximale Tiefe des Index-Cluster-Baumes  $\tau_{max}$  von der Ordnung  $\log_R N$ . In [11] wird gezeigt, dass der Algorithmus  $O(N \log_R N)$  Operationen zur Generierung von  $T_{CL}$  benötigt. Darüber hinaus kann durch geschickte Permutation der Speicherbedarf für den Index-Cluster-Baum auf  $O(N)$  reduziert werden. Dazu werden die Kollokationspunkte und damit die Mengen  $\Phi_i$  so umnummeriert, dass jeder Index-Cluster einem zusammenhängenden Block der Matrix entspricht.

Das heißt für  $t \in T_{CL}$  existieren zwei Zahlen  $t_{min}$  und  $t_{max}$  mit

$$t = \{i \in \mathcal{J}, t_{min} \leq i \leq t_{max}\}$$

und es genügt, für jeden Index-Cluster nur die entsprechenden Anfangs- und Endindizes abzuspeichern. Da die Permutationen sich in einem Vektor der Länge  $N$  abspeichern lassen, verhält sich der Speicheraufwand von  $T_{CL}$  wie  $\#T_{CL} = O(N)$ . Wird hingegen jeder Index-Cluster vollständig abgespeichert, so ist der Speicherbedarf von der Ordnung  $N \log_R N$ .

Mit Hilfe des Index-Cluster-Baums  $T_{CL}$  definieren wir einen Baum, der dazu dient, eine hierarchische Zerlegung  $Z'$  der Index-Menge  $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$  zur Verfügung zu stellen. Diese Zerlegung entspricht einer Partitionierung der Matrix in Blöcke, die mit  $(t_1, t_2) \in Z'$  korrespondieren, siehe Abbildung 3.3.

**Definition 3.2.5** Sei  $\mathcal{J}$  eine endliche Indexmenge. Ein Index-Cluster-Paar-Baum  $T'_{CL}$  ist ein Index-Cluster-Baum zur Menge  $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$ .

Um den Algorithmus 3.2.4 zur Generierung des Baums  $T'_{CL}$  anwenden zu können, müssen wir die Abbildung  $S$  geeignet auf  $T_{CL} \times T_{CL}$  erweitern, vgl. [50]. Das heißt wir definieren für ein Index-Cluster-Paar  $(t_1, t_2) \in T_{CL} \times T_{CL}$

$$S'(t_1, t_2) = \begin{cases} \{(s_1, s_2), s_1 \in S(t_1), s_2 \in S(t_2)\}, & S(t_1), S(t_2) \neq \emptyset \\ \emptyset, & S(t_1) = \emptyset \vee S(t_2) = \emptyset \end{cases}$$

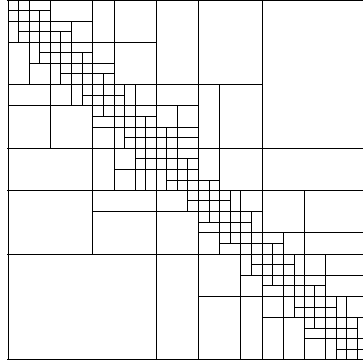


Abbildung 3.3: Hierarchische Partitionierung einer Matrix

und bemerken, dass  $\#S'(t_1, t_2) > 1$  und

$$t_1 \times t_2 = \bigcup_{(s_1, s_2) \in S'(t_1, t_2)} s_1 \times s_2$$

für  $\min(\#t_1, \#t_2) > 1$  gilt. Ansonsten ist  $S'(t_1, t_2) = \emptyset$ .

Die Abbildung  $S'$  erfüllt damit die Voraussetzungen des Algorithmus 3.2.4 und  $T'_{CL} = T_{CL}(\mathcal{J} \times \mathcal{J})$  kann analog zu oben mit  $Baum(\mathcal{J} \times \mathcal{J}, T'_{CL})$  erzeugt werden.

**Lemma 3.2.6** *Für den Index-Cluster-Paar-Baum  $T'_{CL}$  gelten*

1.  $T'_{CL} = \{(t_1, t_2), t_1, t_2 \in T_{CL} \text{ haben die gleiche Tiefen}\}$  und die Tiefe jedes Paares  $(t_1, t_2) \in T'_{CL}$  ist die von  $t_1$  und  $t_2$  in  $T_{CL}$ .
2.  $L(T'_{CL}) = \{(t_1, t_2) \in T'_{CL}, t_1 \in L(T_{CL}) \text{ oder } t_2 \in L(T_{CL})\}$ .

**Beweis.** Folgt sofort aus der Definition der Abbildung  $S'$ . ■

Abschließend geben wir einen Algorithmus an, der eine zulässige Zerlegung  $Z'$  von  $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$  liefert.

**Definition 3.2.7** *Eine Zerlegung  $Z'$  von  $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$  heißt  $\eta^*$ -zulässig, wenn jedes Index-Cluster-Paar  $(t_1, t_2) \in Z' \setminus L(T'_{CL})$   $\eta^*$ -zulässig ist.*

**Algorithmus 3.2.8 (Generierung einer zulässigen Zerlegung)**

Setze  $Z' := \emptyset$  und rufe  $Zerl(\mathcal{J} \times \mathcal{J}, Z')$  auf, wobei  $Zerl(\mathcal{J} \times \mathcal{J}, Z')$  für  $(t_1, t_2) \in \mathcal{J} \times \mathcal{J}$  die folgende rekursive Routine ist.

*Routine Zerl*(( $t_1, t_2$ ),  $Z'$ )

*Falls* ( $t_1, t_2$ )  $\in L(T'_{CL})$  *oder* ( $t_1, t_2$ )  $\eta^*$ -zulässig *ist*

*Setze*  $Z' := Z' \cup \{(t_1, t_2)\}$

*Sonst*

*Rufe für alle* ( $s_1, s_2$ )  $\in S'(t_1, t_2)$  *die Routine* *Zerl*(( $s_1, s_2$ ),  $Z'$ ) *auf.*

Offensichtlich ist die so konstruierte Zerlegung  $\eta^*$ -zulässig und die Tiefe jedes Paares ( $t_1, t_2$ ) von  $Z'$  in  $T'_{CL}$  und damit  $\#Z'$  sind minimal. Darüber hinaus wird in [11] gezeigt, dass der Algorithmus  $O((\eta^*)^{-4}N^{1+\zeta})$ ,  $\forall \zeta > 0$ , Operationen und Speichereinheiten benötigt.

Wir bemerken noch, dass eine vollständige Generierung des Index-Cluster-Paar-Baumes einen Aufwand der Ordnung  $N^2$  bewirken würde. Da jedoch die Kenntnis der Mengen  $S(t_1)$  und  $S(t_2)$  genügt, um  $S'(t_1, t_2)$  auszuwerten, ist es sinnvoll, den Index-Cluster-Baum  $T_{CL}$  vollständig zu generieren und dann den Algorithmus 3.2.8 ohne die explizite Berechnung von  $T'_{CL}$  auszuführen.

### 3.3 Schnelle Summationsverfahren

Ausgehend von einer solchen hierarchischen Zerlegung definieren wir das Nah- und Fernfeld bezüglich der Zerlegung  $Z'$  durch

$$\mathcal{N}(Z') = L(T'_{CL}) \text{ bzw. } \mathcal{F}(Z') = Z' \setminus \mathcal{N}(Z').$$

Für die Matrix  $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$  ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned} A &= (A^{\mathcal{F}} + A^{\mathcal{N}}) \text{ mit} \\ (A)_{ij} &= \sum_{(t_1, t_2) \in \mathcal{F}(Z')} a_{ij} + \sum_{(t_1, t_2) \in \mathcal{N}(Z')} a_{ij}, \end{aligned}$$

wobei  $A^{\mathcal{F}}$  den Fern- und  $A^{\mathcal{N}}$  den Nahfeldanteil bezeichnen und

$$a_{ij} = \int_{\Gamma} k(x, y_i) \varphi_j(x) dF_x, \quad y_i \in G_{t_2}, \Phi_j \subseteq G_{t_1} \text{ für } i \in t_2, j \in t_1.$$

Während die  $O((\eta^*)^{-2}N)$  Einträge des Nahfeldanteils direkt mit der vorgestellten Fourier-Methode ausgewertet werden, können wir die Blöcke im



Fernfeldanteil der Matrix durch entsprechende Niedrigrang-Matrizen approximieren. Die so erzeugten Matrizen werden auch als  $\mathcal{H}$ -Matrizen [48] bezeichnet.

Wir stellen im Folgenden das Panel-Clustering- und das Multipol-Verfahren vor. Diese nutzen für  $(t_1, t_2) \in \mathcal{F}(Z')$  die Beziehung

$$\begin{aligned} a_{ij}^{\mathcal{F}} &= \int_{\Gamma} k(x, y_i) \varphi_j(x) dF_x \\ &\approx \int_{\Gamma} k_p(x, y) \varphi_j(x) dF_x, \quad y = y_i \in G_{t_2}, \Phi_j \subseteq G_{t_1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

für  $i \in t_2, j \in t_1$  aus, um den Fernfeldanteil  $A^{\mathcal{F}}$  effizient auszuwerten.

Darüber hinaus bietet die Technik der multiskalenbasierten Matrixkompression die Möglichkeit, den numerischen Aufwand zu reduzieren. Eine Übersicht über die Anwendung von Wavelets zur Approximation von Integraloperatoren findet der interessierte Leser unter anderen in [80], [78] oder speziell für die Helmholtz-Gleichung in [26].

### 3.3.1 Das Panel-Clustering-Verfahren

Das Panel-Clustering-Verfahren wurde von Hackbusch und Nowak [52] für das Kollokationsverfahren eingeführt und für das Galerkin-Verfahren weiterentwickelt [53], [51]. Die ursprüngliche Version basiert auf der polynomiellen Kernentwicklung des Laplace-Operators, d.h.  $G(x, y, \kappa)$  mit  $\kappa = 0$ . Da sich diese Entwicklung nur bedingt für  $\kappa > 0$  eignet, wurde in [38] eine modifizierte Version vorgestellt, die auf der Grundlage des Satzes 3.1.2 basiert.

Wir skizzieren im Folgenden die Grundidee, vgl. [49]. Für  $(t_1, t_2) \in \mathcal{F}(Z')$  mit  $x \in G_{t_1}$  und  $y \in G_{t_2}$  wird mittels geeigneter Skeletonen  $f_l g_l$  ein degenerierter Kern erzeugt,

$$k_p(x, y) = \sum_{l \in \mathcal{J}_p} f_l(x, z_{t_1}) g_l(y, z_{t_1}), \quad \#\mathcal{J}_p = O(p^3), \quad (3.9)$$

so dass

$$|k(x, y) - k_p(x, y)| \leq c_p(\eta^*)^p |k(x, y)| \quad \text{für } |x - z_{t_1}| \leq \eta^* |y - z_{t_1}|$$

gilt. Wir bemerken, dass in der ursprünglichen Version die Funktionen  $g_l$  unabhängig von dem Entwicklungszentrum  $z_{t_1}$  sind.

Mit der Beziehung (3.9) ergeben sich die Einträge des Fernfeldanteils (3.8) zu

$$a_{ij}^{\mathcal{F}} = \sum_{l \in \mathcal{J}_p} g_l(y_i, z_{t_1}) F_l^{t_1}(\varphi_j),$$

wobei

$$F_l^{t_1}(\varphi_j) = \int_{\Gamma} f_l(x, z_{t_1}) \varphi_j(x) dF_x, \quad \Phi_j \subseteq G_{t_1}, j \in t_1.$$

Da die Koeffizienten  $F_l^t(\varphi)$  unabhängig von  $y$  sind, werden sie vorab berechnet. Werten wir die Funktionen  $g_l$  für jedes  $p \in \mathcal{J}_p$  mit  $O(p)$  Operationen aus, so sind für die Auswertung des Fernfeldanteils  $A^{\mathcal{F}} O(p \# \mathcal{J}_p \# \mathcal{F}(Z'))$  Operationen notwendig. In [52] ist gezeigt, dass  $\# \mathcal{F}_*(Z') = O((\eta^*)^{-2} N \log N)$ .

Wir gehen auf die Komplexität der Auswertung von  $F_l^t(\varphi)$  ein und bemerken, dass diese für jeden Index-Cluster  $t \in T_{CL}$  berechnet werden müssen. Sind  $g_l$  jedoch unabhängig von dem Entwicklungszentrum  $z_t$ , so kann jeder Koeffizient  $F_l^t(\varphi)$  durch die rekursive Struktur des Cluster-Baums  $T_{CL}$  gemäß

$$F_l^t(\varphi) = \sum_{s \in S(t)} F_l^s(\varphi) \quad (3.10)$$

bestimmt werden.

Wählen wir  $p = O(\log N)$  und  $\eta^*$  passend, so erhalten wir, dass für die Berechnung der Koeffizienten  $O(N \log^5 N)$  (bzw.  $O(N \log^4 N)$  im Fall (3.10)) Operationen notwendig sind. Da insgesamt  $\# \mathcal{J}_p \# T_{CL}$  Einheiten zur Speicherung der  $F_l^t(\varphi)$  benötigt werden, beträgt der Speicheraufwand  $O(N \log^3 N)$ .

Sind die Koeffizienten  $F_l^t(\varphi)$  berechnet, so besitzt das Panel-Clustering-Verfahren insgesamt einen numerischen Aufwand von  $O(N \log^5 N)$ .

### 3.3.2 Das Multipol-Verfahren

Der grundlegende Artikel über Multipol-Verfahren [72] behandelt die schnelle Lösung von Randintegralgleichungen in 2D mit Hilfe des Nyström-Verfahrens. Darüber hinaus stellte Rokhlin die Anwendung der Multipol-Methode auf Streuprobleme für 2D [74] und 3D [73] vor. Die dort angewandte Technik der sogenannten Diagonalformen des Translationsoperators wurde in [35], [19] weiterentwickelt.

Wir erläutern anhand den Ausführungen [38] die Grundidee dieser Methode. Die Kernapproximation erfolgt in diesem Fall indirekt, d.h. die Lösungen

der Helmholtz-Gleichung werden durch Fernfeld- und Nahfeldrepräsentanten beschrieben.

Sei dazu  $u$  eine abstrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung in  $B^c(z_1, r_1)$ , d.h. sie genügt der Sommerfeld'schen Ausstrahlungsbedingung (1.3), in der Darstellung

$$u(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l(\hat{w}) h_l^{(1)}(\kappa|y - z_1|), \quad \hat{w} = \frac{y - z_1}{|y - z_1|}.$$

In [23] wird gezeigt, dass sich  $u(y)$  wie eine Kugelwelle  $h_0^{(1)}(\kappa|y - z_1|)\Psi(\hat{w})$  verhält, d.h. es gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(z_1 + r\hat{z}) i\kappa r e^{-i\kappa r} = \Psi(\hat{z}), \quad \Psi(\hat{z}) = \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l \alpha_l(\hat{z}),$$

gleichmäßig für  $\hat{z} \in \mathbb{S}^2 = \{z \in \mathbb{R}^3, |z| = 1\}$ . Dabei bezeichnet  $\Psi$  den Fernfeldrepräsentanten von  $u$ .

Analog lässt sich eine Lösung  $u$  in  $B(z_2, r_2)$  in der Form

$$u(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l(\hat{w}) j_l(\kappa|y - z_2|), \quad \hat{w} = \frac{y - z_2}{|y - z_2|},$$

mittels des Nahfeldrepräsentanten  $\Upsilon$  darstellen,

$$u(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \Upsilon(\hat{z}) e^{i\kappa(y-z_2)\hat{z}} dF_{\hat{z}}, \quad \Upsilon(\hat{z}) = \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l \beta_l(\hat{z}).$$

In den obigen Darstellungen sind  $\alpha_l, \beta_l$  Kugelfunktionen vom Grad  $l$ .

**Satz 3.3.1** *Sei  $u$  eine abstrahlende Lösung in  $B^c(z_1, r_1)$  und  $\Psi$  der zugehörige Fernfeldrepräsentant. In  $B(z_2, r_2)$  mit  $|z_1 - z_2| > r_1 + r_2$  erhalten wir durch*

$$\Upsilon_{(p)}(\hat{z}) = \lambda_p(z_2 - z_1, \hat{z}) \Psi(\hat{z}), \quad \lambda_p(x, \hat{y}) = \sum_{l=0}^p i^l (2l+1) h_l^{(1)}(\kappa|x|) P_l(\hat{x} \cdot \hat{y}),$$

die Funktion

$$u_p(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \Upsilon_{(p)}(\hat{z}) e^{i\kappa(y-z_2)\hat{z}} dF_{\hat{z}}. \quad (3.11)$$

Dann konvergiert  $u_p$  gleichmäßig für alle  $y \in B(z_2, r_2)$  gegen  $u$  für  $p \rightarrow \infty$ .

Der Beweis des Satzes findet der interessierte Leser unter anderen in [38].

Mit den Notationen des letzten Satzes definiert

$$\mathcal{N}^{(\tau)}(Z') = \{t_1, t_2 \in Z^{(\tau)}, (r_{t_1} + r_{t_2}) > \eta^* |z_{t_1} - z_{t_2}|\}, \quad 0 < \eta^* < 1,$$

das Nah- und  $\mathcal{F}^{(\tau)}(Z') = (Z^{(\tau)} \times Z^{(\tau)}) \setminus \mathcal{N}^{(\tau)}(Z')$  das Fernfeld bezüglich der Tiefe  $\tau$ ,  $\tau = 0, \dots, \tau_{max}$ .

Nach der Formulierung der notwendigen Begriffe und der Möglichkeit, die Informationen des Fernfeldes in einen lokalen Nahfeldrepräsentanten umzuwandeln, gehen wir auf einen Algorithmus zur Berechnung des Fernfeldanteils  $A^{\mathcal{F}}$  ein.

Zunächst werden auf der maximalsten Tiefe  $\tau = \tau_{max}$  für alle Index-Cluster  $t \in Z^{(\tau)}$  die Fernfeldrepräsentanten  $\Psi_{t, \tau_{max}}$  von

$$\int_{\Gamma} k(x, s) \varphi(x) dF_x, \quad s \in \mathbb{S}^2,$$

mit  $\varphi = \varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, t$  und  $\text{supp } \varphi \subseteq G_t$ , berechnet.

Durch rekursives Aufsteigen in der Baumstruktur werden dann alle  $\Psi_{t, \tau}$  bezüglich ihrer Clusterzentren bestimmt. Um  $\Psi_{t, \tau-1}$  für jeden Index-Cluster  $t \in Z^{(\tau)}$  zu erzeugen, werden die Fernfeldrepräsentanten seiner Söhne in das Clusterzentrum  $z_t$  verschoben und addiert.

Ausgehend von der Wurzel werden die Nahfeldrepräsentanten rekursiv absteigend in der Baumstruktur bezüglich ihrer Clusterzentren berechnet. Dazu werden für alle Index-Cluster-Paare  $(t, t') \in \mathcal{F}^{(\tau)}(Z')$  einer Tiefe  $\tau$  die Fernfeldrepräsentanten  $\Psi_{t', \tau}$  in Nahfeldrepräsentanten konvertiert und zu den sogenannten Nahfeld-Initialisierungen  $\tilde{\Upsilon}_{t, \tau, (p)}$  addiert,

$$\Upsilon_{t, \tau, (p)}(s) = \sum_{(t, t') \in \mathcal{F}^{(\tau)}(Z')} \tilde{\Upsilon}_{t, \tau, (p)}(s) + \lambda_p(z_t - z_{t'}, s) \Psi_{t', \tau}(s).$$

Die Nahfeld-Initialisierung  $\tilde{\Upsilon}_{t, \tau+1, (p)}$  für jeden Index-Cluster der Tiefe  $(\tau+1)$  ergibt sich aus dem Nahfeldrepräsentanten  $\Upsilon_{t, \tau, (p)}$ , der in die entsprechenden Clusterzentren der Söhne verschoben wird. Weiter gilt  $\tilde{\Upsilon}_{t, 0, (p)} = 0$ .

Abschließend wird das Integral (3.11) für die maximalste Tiefe  $\tau = \tau_{max}$  bestimmt. Die Auswertung erfolgt mittels einer geeigneten Gauß-Legendre-Quadraturformel  $Q_{\mathbb{S}^2}$  und wir erhalten den Fernfeldanteil der Matrix  $A$

$$a_{ij}^{\mathcal{F}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{t \in Z^{(\tau_{max})} \\ y_i \in G_t}} \sum_{s \in Q_{\mathbb{S}^2}} \omega_s \Upsilon_{t, \tau_{max}, (p)}(s) e^{i\kappa(y_i - z_t)s}, \quad i, j = 1, \dots, t.$$

Wir bemerken, dass wir die Fern- und Nahfeldrepräsentanten nur in den Quadraturpunkten  $s \in Q_{\mathbb{S}^2}$  benötigen.

Insgesamt benötigt das Verfahren  $O(N \log^2 N)$  Operationen.

**Bemerkung 3.3.2** *Werten wir den Algorithmus nur auf einer festen Tiefe  $\tau$  aus, so beträgt der numerische Aufwand  $O(N^{3/2})$ , vgl. [73].*

## 3.4 Die Adaptive Cross Approximation

Alle Verfahren des vorangegangenen Abschnitts sowie die Approximation mittels  $\mathcal{H}$ -Matrizen [48], [50] basieren auf der expliziten Kenntnis einer geeigneten Kernentwicklung. Im Gegensatz dazu verwenden die sogenannten algebraischen Methoden die Niedrigrang-Matrizen, insbesondere Rang-1-Matrizen, zur Approximation der Blöcke. Daher ist die explizite Kenntnis einer Kernentwicklung nicht notwendig, lediglich die Existenz eines degenerierten Kerns wird gefordert.

Wir definieren den approximierenden Rang einer Matrix.

**Definition 3.4.1** *Sei  $\varepsilon > 0$ . Der  $\varepsilon$ -Rang einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  bezüglich der Matrixnorm  $\|\cdot\|$  ist als*

$$\text{rank}_\varepsilon A = \min\{\text{rank } \tilde{A} : \|A - \tilde{A}\| < \varepsilon \|A\|_F\}$$

*definiert.*

Sei  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  ein gemäß Abschnitt 3.2  $\eta^*$ -zulässiger Block. Der beste Approximant  $\tilde{A}$  mit vorgegebenem Rang  $p$  kann mit Hilfe der Singulärwertzerlegung gefunden werden

$$\tilde{A} = \sum_{l=1}^p \sigma_l u_l v_l^*$$

wobei  $(\sigma_l, u_l, v_l)$ ,  $l = 1, \dots, p$ , die  $p$  größten Singulären Tripel sind. Insbesondere gibt die Frobenius-Norm eine untere Schranke des Fehlers an,

$$\min\{\|A - \tilde{A}\|_F^2; \text{rank } \tilde{A} \leq p\} = \sum_{l=p+1}^n \sigma_l^2,$$

vgl. [65]. Die Singulärwertzerlegung benötigt jedoch  $O(m^3 + n^3)$  Operationen, so dass sie für die Praxis nicht relevant ist.

Während die bisherigen Verfahren [42], [43] stets eine vollständige Blockberechnung erfordern, kann bei dem ACA-Verfahren [10], [13] (Adaptive Cross Approximation) darauf verzichtet werden.

Ein weiterer Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, dass sich der Rang des Approximanten an den Approximationsfehler anpasst. Während sich das zugehörige Abbruchkriterium an dem laufenden Fehler orientiert, wird bei den oben erwähnten Methoden (auch die aus dem vorangegangenen Abschnitt) der benötigte Rang der Approximation stets a priori aus der Abschätzung des theoretischen Approximationsfehlers gewonnen.

Wir beschreiben nun das ACA-Verfahren für komplexwertige Aufgabenstellungen. Dazu betrachten wir zunächst ein eindimensionales analytisches Problem und zeigen dann konkret zwei Versionen zur Implementierung auf.

### 3.4.1 Das analytische Problem

Sei im Folgenden  $(t_1, t_2)$  ein  $\eta^*$ -zulässiges Index-Cluster-Paar. Um die Kernfunktion  $k(x, y)$  für  $x \in G_{t_1}$  und  $y \in G_{t_2}$  zu approximieren, konstruieren wir zwei Funktionenfolgen  $r_l, b_l : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ . Dabei bezeichnet  $r_l$  das jeweilige Residuum zur Approximation  $b_l$ . Wir setzen

$$b_0(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad r_0(x, y) = k(x, y)$$

und betrachten für jedes  $l = 1, 2, \dots$  die Punkte  $x_{j_l} \in G_{t_1}$ ,  $y_{i_l} \in G_{t_2}$  mit  $\varrho_l = (r_{l-1}(x_{j_l}, y_{i_l}))^{-1} \neq 0$ . Damit ergeben sich

$$b_l(x, y) = b_{l-1}(x, y) + \varrho_l r_{l-1}(x_{j_l}, y) r_{l-1}(x, y_{i_l}) \quad (3.12)$$

$$= \sum_{s=1}^l \varrho_s r_{s-1}(x_{j_s}, y) r_{s-1}(x, y_{i_s}) \quad (3.13)$$

$$r_l(x, y) = r_{l-1}(x, y) - \varrho_l r_{l-1}(x_{j_l}, y) r_{l-1}(x, y_{i_l}). \quad (3.14)$$

In [10] werden die folgenden Eigenschaften der Darstellungen (3.12) und (3.14) durch vollständige Induktion nach  $l$  bewiesen.

Für alle  $l = 0, 1, \dots$  und  $x \in G_{t_1}$ ,  $y \in G_{t_2}$  gelten

$$1. \quad k(x, y) = b_l(x, y) + r_l(x, y) \quad (3.15)$$

$$2. \quad r_l(x, y_{i_q}) = 0 \quad \text{und} \quad r_l(x_{j_q}, y) = 0 \quad \text{für alle} \quad 1 \leq q \leq l \quad (3.16)$$

$$3. \quad r_l(x, y) = k(x, y) - \sum_{\nu=1}^l \varrho_\nu^{(l)}(y) k(x, y_{i_\nu}), \quad (3.17)$$

mit Funktionen  $\varrho_\nu^{(l)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  für  $\nu = 1, \dots, l$ .

Wir stellen fest, dass die Approximationen  $b_l(x, y)$  die Kernfunktion in den Stützstellen  $x_{j_s}$  und  $y_{i_\nu}$  interpolieren, denn es gilt mit (3.16) und (3.15)

$$b_l(x_{j_s}, y) = k(x_{j_s}, y) \text{ gleichmäßig bzgl. } y, \quad (3.18)$$

$$b_l(x, y_{i_\nu}) = k(x, y_{i_\nu}) \text{ gleichmäßig bzgl. } x, \quad (3.19)$$

für  $s, \nu = 1, \dots, l$ . Um die Folgen  $b_l(x, y)$  und  $r_l(x, y)$  näher zu analysieren, betrachten wir die Matrizen  $C_l \in \mathbb{C}^{l \times l}$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , mit

$$C_l = \begin{pmatrix} k(x_{j_1}, y_{i_1}) & \cdots & k(x_{j_l}, y_{i_1}) \\ \vdots & & \vdots \\ k(x_{j_1}, y_{i_l}) & \cdots & k(x_{j_l}, y_{i_l}) \end{pmatrix},$$

sowie die Matrizen  $C_l^{(sp)}(q, x)$  und  $C_l^{(z)}(q, y)$ , die aus  $C_l$  dadurch entstehen, dass wir im ersten Fall die  $q$ -te Spalte durch den Vektor  $(k(x, y_{i_s}))_{s=1, l}$  und im zweiten Fall entsprechend die  $q$ -te Zeile durch den Vektor  $(k(x_{j_s}, y))_{s=1, l}$  ersetzen. Insbesondere gilt  $C_l^{(sp)}(q, x_{j_q}) = C_l^{(z)}(q, y_{i_q}) = C_l$ .

Für die Determinante der Matrizen  $C_l^{(sp)}(q, x)$  formulieren wir die folgenden Rekursionsformeln und sehen, dass die Matrizen  $C_l$  invertierbar sind. Entsprechende Aussagen gelten für die Determinante von  $C_l^{(z)}(q, y)$ .

**Lemma 3.4.2** *Für  $1 \leq q \leq l$  und  $l = 1, 2, \dots$  gelten*

$$\det C_l^{(sp)}(q, x) = \varrho_l^{-1} \det C_{l-1}^{(sp)}(q, x) + (-1)^{q+l} r_{l-1}(x, y_{i_l}) \det C_{l-1}^{(sp)}(q, x_{j_l})$$

und

$$\begin{aligned} \det C_1^{(sp)}(1, x) &= r_0(x, y_{i_1}) \\ \det C_l^{(sp)}(l, x) &= r_{l-1}(x, y_{i_l}) \det C_{l-1} \text{ für } l > 1. \end{aligned}$$

*Insbesondere gilt*

$$\det C_l = \varrho_l^{-1} \det C_{l-1} = \prod_{s=1}^l \varrho_s^{-1} \neq 0.$$

**Beweis.** Sei  $1 \leq q \leq l$ . Wir subtrahieren von der letzten Zeile der Matrix  $C_l^{(sp)}(q, x)$  eine Linearkombination der übrigen Zeilen mit den Koeffizienten  $\varrho_\nu^{(l-1)}(y_{i_l})$ ,  $\nu = 1, \dots, l$ . Für die so konstruierte Matrix  $\tilde{C}_l^{(sp)}(q, x)$  gilt  $\det \tilde{C}_l^{(sp)}(q, x) = \det C_l^{(sp)}(q, x)$ .

Mit der Darstellung (3.17) ergibt sich für  $s \in \{1, \dots, l\} \setminus \{q\}$

$$(\tilde{C}_l^{(sp)}(q, x))_{l,s} = k(x_{j_s}, y_{i_l}) - \sum_{\nu=1}^{l-1} \varrho_\nu^{(l-1)}(y_{i_l}) k(x_{j_s}, y_{i_\nu}) = r_{l-1}(x_{j_s}, y_{i_l}).$$

Insbesondere sind wegen (3.16) die Einträge  $(\tilde{C}_l^{(sp)}(q, x))_{l,s} = 0$  für alle  $s \in \{1, \dots, l-1\} \setminus \{q\}$ .

Das heißt, dass die letzte Zeile der Matrix  $\tilde{C}_l^{(sp)}(q, x)$  maximal zwei von Null verschiedene Einträge besitzt,

$$(\tilde{C}_l^{(sp)}(q, x))_{l,q} = r_{l-1}(x, y_{i_l}) \quad \text{und} \quad (\tilde{C}_l^{(sp)}(q, x))_{l,l} = r_{l-1}(x_{j_l}, y_{i_l}) = \varrho_l^{-1}.$$

Die Behauptung folgt mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes. ■

Darüber hinaus stellen wir die Approximationen  $b_l(x, y)$  aus (3.13) mit Hilfe der Matrizen  $C_l$  dar.

Wir bemerken, dass  $b_l(x, y) = z^* M_l w$  mit  $M_l \in \mathbb{C}^{l \times l}$  und  $z, w \in \mathbb{C}^l$  gilt. Für

$$\overline{(z)}_s = k(x_{j_s}, y) \quad \text{und} \quad (w)_s = k(x, y_{i_s}), \quad s = 1, \dots, l,$$

ergibt sich mit der Eigenschaft (3.16) die Beziehung  $C_l = C_l M_l C_l$  und damit  $M_l = C_l^{-1}$ , d.h.

$$b_l(x, y) = (k(x_{j_s}, y))_{s=1,l}^T C_l^{-1} (k(x, y_{i_s}))_{s=1,l}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Insbesondere gilt mit der Cramer'schen Regel

$$b_l(x, y) = \sum_{s=1}^l \frac{\det C_l^{(z)}(s, y)}{\det C_l} k(x, y_{i_s}). \quad (3.21)$$

Die letzte Darstellung zeigt, dass die Approximationen  $b_l(x, y)$  die Kernfunktion in den Stellen  $y_{i_s}$  interpoliert, vgl. (3.19).

Sei

$$k_p(x, y) = b_p(x, y)$$

für ein  $p \in \mathbb{N}_0$  die Approximation der gegebenen Kernfunktion  $k(x, y)$ .

Wir stellen zur Abschätzung des zugehörigen Residuums

$r_p(x, y) = k(x, y) - k_p(x, y)$  eine Verbindung mit der Interpolation durch Lagrange-Polynome her.

Dazu betrachten wir ein System aus Lagrange-Polynomen

$$L_l(y) = \frac{\det C_p^{(z)}(l, y)}{\det C_p}, \quad l = 1, \dots, p,$$



mit  $L_l(y_{i_s}) = \delta_{ls}$ ,  $l, s = 1, \dots, p$ , wobei  $\delta$  in diesem Fall das Kroneckersymbol bezeichnet. Mit der Darstellung (3.21) ergibt sich das zugehörige Residuum zu

$$E_p(x, y) = k(x, y) - (L_l(y))_{l=1,p}^T (k(x, y_{i_l}))_{l=1,p}. \quad (3.22)$$

**Satz 3.4.3** *Für  $x \in G_{t_1}$  und  $y \in G_{t_2}$  sei  $r_p(x, y)$  das durch die Approximation  $k_p(x, y)$  induzierte Residuum. Dann gilt*

$$r_p(x, y) = E_p(x, y) - \sum_{\nu=1}^p \frac{\det C_p^{(sp)}(\nu, x)}{\det C_p} E_p(x_{j_\nu}, y).$$

**Beweis.** Wir bemerken mit den Eigenschaften (3.15) und (3.20),

$$\begin{aligned} r_p(x, y) &= k(x, y) - b_p(x, y) \\ &= k(x, y) - (k(x_{j_l}, y))_{l=1,p}^T C_p^{-1} (k(x, y_{i_l}))_{l=1,p} \\ &\stackrel{(3.22)}{=} E_p(x, y) - [(k(x_{j_l}, y))_{l=1,p}^T - (L_l(y))_{l=1,p}^T C_p] C_p^{-1} (k(x, y_{i_l}))_{l=1,p}. \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} (k(x_{j_\nu}, y))_{\nu=1,p}^T - (L_\nu(y))_{\nu=1,p}^T C_p &= \left( k(x_{j_\nu}, y) - \sum_{s=1}^p L_s(y) k(x_{j_\nu}, y_{i_s}) \right)_{\nu=1,p} \\ &= (E_p(x_{j_\nu}, y))_{\nu=1,p}, \end{aligned}$$

folgt

$$r_p(x, y) = E_p(x, y) - \sum_{\nu=1}^p E_p(x_{j_\nu}, y) (C_p^{-1} (k(x, y_{i_l}))_{l=1,p})_\nu.$$

Mit der Cramer'schen Regel ergibt sich

$$(C_p^{-1} (k(x, y_{i_l}))_{l=1,p})_\nu = \frac{\det C_p^{(sp)}(\nu, x)}{\det C_p}$$

und damit die Behauptung. ■

Abschließend geben wir noch ein Kriterium zur Auswahl der Interpolationspunkte  $x_{j_l}$  und  $y_{i_l}$  an.

**Folgerung 3.4.4** *Angenommen für  $l = 1, \dots, p$  seien die Punkte  $x_{j_l} \in G_{t_1}$  und  $y_{i_l} \in G_{t_2}$  so gewählt, dass*

$$|r_{l-1}(x_{j_l}, y_{i_l})| \geq |r_{l-1}(x, y_{i_l})|$$

für alle  $x \in G_{t_1}$  erfüllt ist. Dann gilt für  $q = 1, \dots, l$

$$\sup_{x \in G_{t_1}} \det C_l^{(sp)}(q, x) \leq 2^{l-q} \det C_l$$

und folglich für  $y \in G_{t_2}$

$$|r_p(x, y)| \leq (1 + 2^p) \sup_{x \in G_{t_1}} |E_p(x, y)|. \quad (3.23)$$

**Beweis.** Man wende Lemma 3.4.2 an. ■

### 3.4.2 Numerische Aspekte

Das beschriebene analytische Problem führen wir auf die Niedrigrang-Approximation der Matrizen aus Abschnitt 2.2 über, indem wir für einen  $\eta^*$ -zulässigen Block  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$

$$A = B_l + R_l, \quad l = 0, \dots, p,$$

setzen. Dabei gilt

$$(R_l)_{ij} = \int_{\Gamma} r_l(x, y_i) \varphi_j(x) dF_x, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

und wir bemerken, dass die Matrix  $B_l$  vom Rang  $l$  die Gestalt

$$B_l = \sum_{\nu=1}^l u_\nu v_\nu^*$$

besitzt.

Die erste Version nennen wir *ACA mit vollständiger Pivotisierung*, da in jedem Schritt die vollständige Fehlermatrix  $R_l$  generiert wird, um den maximalen Eintrag zu finden. Daher kann der Fehler  $\|R_l\|_F$  exakt bestimmt werden. Dieser Algorithmus eignet sich jedoch nur bedingt für großdimensionierte Probleme, da zur Berechnung des Approximanten  $\tilde{A} = B_p$  vom Rang  $p$   $O(pnm)$  Operationen und  $O(nm)$  Speichereinheiten notwendig sind.

#### Algorithmus 3.4.5 (ACA mit vollständiger Pivotisierung)

Sei  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Setze den Anfangsfehler  $R_0 := A$  und die Anfangsnäherung  $B_0 := 0$ .

Für  $l = 0, 1, 2, \dots$  berechne

1.  $l := l + 1$

2. Finde  $(i_l, j_l)$  mit  $(R_{l-1})_{i_l, j_l} = \max_{i, j} |(R_{l-1})_{ij}|$

3. Setze  $\varrho_l = \frac{1}{(R_{l-1})_{i_l, j_l}}$ ,  $u_l = R_{l-1} e_{j_l}$  und  $v_l = R_{l-1}^* e_{i_l}$

4.  $R_l = R_{l-1} - \varrho_l u_l v_l^*$

5.  $B_l = B_{l-1} + \varrho_l u_l v_l^*$

bis  $\|R_l\|_F \leq \varepsilon \|A\|_F$  (3.24)

Setze den Rang  $p = l$  und den Approximanten  $\tilde{A} = B_p$ .

Die Vektoren  $e_i$  sind dabei die  $i$ -ten kanonischen Vektoren im jeweiligen Raum.

In der Praxis werden die Einträge der Matrix  $R_0$  mittels der Fourier-Methode aus Abschnitt 2.2 berechnet und die Pivot-Elemente  $(R_{l-1})_{i_l, j_l}$  werden jeweils bei der Berechnung von  $\|R_l\|_F$  bestimmt.

Die Version *ACA mit einer partiellen Pivotisierung* erlaubt hingegen die Berechnung des Niedrigrang-Approximanten  $\tilde{A} = B_p$  ohne die vollständige Information des ursprünglichen Blockes. In diesem Fall werden nur  $O(p(n+m))$  Speichereinheiten und  $O(p^2(n+m))$  numerische Operationen zur Berechnung des Approximanten benötigt. Da die Matrix nicht vollständig berechnet wird, kann der Fehler  $\|R_l\|_F$  nun nicht mehr exakt angegeben werden. Wir schätzen dafür die Norm des Approximanten ab, die sich rekursiv durch

$$\|B_l\|_F^2 = \|B_{l-1}\|_F^2 + 2 \sum_{\nu=1}^{l-1} u_l^* u_\nu v_\nu^* v_l + \|u_l\|_F^2 \|v_l\|_F^2$$

angeben lässt.

#### Algorithmus 3.4.6 (ACA mit einer partiellen Pivotisierung)

Sei  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Setze die Anfangsnäherung  $B_0 := 0$  und den Abfangsfehler  $R_0 := A$ .  $\mathcal{J}_R$  bezeichne die Indexmenge der abgearbeiteten Zeilen von  $R_l$ ,  $l \geq 0$ . Setze  $\mathcal{J}_R := \emptyset$  und  $i_1 := 1$ .

Für  $l = 0, 1, \dots$  berechne

1.  $l := l + 1$

2.  $\star$  Ist  $i_l > m$ , so endet der Algorithmus. Ansonsten

1. Setze  $\mathcal{J}_R := \mathcal{J}_R \cup \{i_l\}$  und  $\tilde{v}_l = A^* e_{i_l} - \sum_{\nu=1}^{l-1} \overline{(u_\nu)_{i_l}} v_\nu$

2. Finde  $j_l$  mit  $(\tilde{v}_l)_{j_l} = \max_j |(\tilde{v}_l)_j|$

3. Falls  $(\tilde{v}_l)_{j_l} = 0$

Setze  $i_l := i_l + 1$  und gehe zu  $\star$

4. Setze  $v_l = (\tilde{v}_l)_{j_l}^{-1} \tilde{v}_l$  und  $u_l = A e_{j_l} - \sum_{\nu=1}^{l-1} \overline{(v_\nu)_{j_l}} u_\nu$

5.  $B_l = B_{l-1} + u_l v_l^*$

6. Finde  $i_{l+1}$  mit  $(u_l)_{i_{l+1}} = \max_{i \notin \mathcal{J}_R} |(u_l)_i|$

$$\text{bis} \quad \|u_l\|_F \|v_l\|_F \leq \varepsilon \|B_l\|_F \quad (3.25)$$

Setze den Rang  $p = l$  und den Approximanten  $\tilde{A} = B_p$ .

Die Einträge der jeweiligen  $j_l$ -ten Spalte und  $i_l$ -ten Zeile von  $A$  bzw.  $A^*$  werden dabei analog zu oben mit der beschriebenen Fourier-Methode ausgewertet.

Das nächste Lemma zeigt, dass beide Algorithmen stets terminieren.

**Lemma 3.4.7** Sei  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  mit  $\text{rank } A = p$ . Dann gilt  $B_p = A$ .

**Beweis.** Wir zeigen die Behauptung durch die Induktion nach  $p$ .

Für  $p = 1$  gilt offensichtlich  $R_1 = 0$  und  $B_1 = A$ .

Für  $p > 1$  betrachten wir den  $l$ -ten Iterationsschritt des Algorithmus 3.4.5 oder 3.4.6,  $l < p$  beliebig. Wir setzen  $(R_l)_{ij} = r_{ij}$  und oBdA. sei  $i_l = j_l = 1$ , d.h.  $r_{11} \neq 0$  gibt das Pivot-Element  $\varrho_l$  an (ansonsten vertausche geeignet Spalten und Zeilen von  $R_l$ ). Dann gilt

$$R_{l+1} = R_l - \varrho_l (R_l e_1) (R_l^* e_1)^* = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \tilde{R}_l & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

und damit  $\text{rank } R_{l+1} = \text{rank } \tilde{R}_l$ , wobei

$$\tilde{R}_l = \begin{pmatrix} r_{22} - \frac{r_{21}r_{12}}{r_{11}} & \cdots & r_{2n} - \frac{r_{21}r_{1n}}{r_{11}} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{m2} - \frac{r_{m1}r_{12}}{r_{11}} & \cdots & r_{mn} - \frac{r_{m1}r_{1n}}{r_{11}} \end{pmatrix}.$$

Andererseits gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{r_{21}}{r_{11}} & 1 & & \\ \vdots & & \cdots & \\ -\frac{r_{m1}}{r_{11}} & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} R_l = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{R}_l & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

d.h.  $\text{rank } \tilde{R}_l = \text{rank } R_l - 1$ . Aber diese Relationen entsprechen gerade einer Reduktion des Ranges um Eins im  $l$ -ten Iterationsschritt. ■

Zusammenfassend stellen wir fest, dass für die Matrizen  $A_\kappa \in \mathbb{C}^{N \times N}$  aus Beispiel 3.1 eine blockweise Niedrigrang-Approximation bestimmt werden kann, vgl. Bemerkung 3.1.9. Dazu erzeugen wir zunächst gemäß Abschnitt 3.2 einen Cluster-Baum (Algorithmus 3.2.4) für alle Kollokationspunkte und geben eine zulässige Zerlegung  $Z'$  (Algorithmus 3.2.8) an. Nach einer geeigneten Permutation besteht  $A_\kappa$  aus approximierbaren Blöcken verschiedener Größe.

Sei  $A_\kappa^{t_1, t_2} \in \mathbb{C}^{m_1 \times m_2}$  mit  $m_1 = \#t_1$  und  $m_2 = \#t_2$  der dem Index-Cluster-Paar  $(t_1, t_2) \in Z'$  entsprechende Block mit den Einträgen

$$a_{ij} = \int_{\Gamma} k(x, y_i) \varphi_j(x) dF_x, \quad y_i \in G_{t_2}, \Phi_j \subseteq G_{t_1} \text{ für } i \in t_2, j \in t_1.$$

Während für  $\min(\#t_1, \#t_2) = 1$  die Einträge  $a_{ij}$  mittels der in Abschnitt 2.2 beschriebenen Fourier-Methode berechnet werden, wenden wir zur Niedrigrang-Approximation von  $A_\kappa^{t_1, t_2}$  den Algorithmus 3.4.6 an. Den zugehörigen Approximanten bezeichnen wir mit  $\tilde{A}_\kappa^{t_1, t_2}$ .

Für die Matrix-Vektor-Multiplikation  $Av = w$  ergibt sich dann der folgende Algorithmus

#### Algorithmus 3.4.8 (Matrix-Vektor-Multiplikation)

Sei  $A_\kappa \in \mathbb{C}^{N \times N}$  mit der oben beschriebenen Blockstruktur  $\tilde{A}_\kappa^{t_1, t_2}$  gegeben. Setze

den Ergebnisvektor  $w := 0$ .

Für  $(t_1, t_2) \in Z'$  berechne

1. Falls  $\left(\text{rank } \tilde{A}_\kappa^{t_1, t_2} \cdot (m_1 + m_2)\right) < (m_1 m_2)$ :

Berechne  $\tilde{A}_\kappa^{t_1, t_2} v_{t_1}$  mittels der Darstellung (3.5).

Sonst

Berechne  $\tilde{A}_\kappa^{t_1, t_2} v_{t_1}$  mittels der gewöhnliche Matrix-Vektor-Multiplikation.

2.  $w_{t_2} := w_{t_2} + \tilde{A}_\kappa^{t_1, t_2} v_{t_1}$

Für den Fall  $\kappa = 0$  können wir Aussagen über den numerischen Aufwand der Generierung der Approximanten  $\tilde{A}_0$  und der zugehörigen Matrix-Vektor-Multiplikation machen.

Zunächst formulieren wir den folgenden Satz, der in [13] ausgehend von der Fehlerabschätzung (3.23) bewiesen wird.

**Satz 3.4.9** *Sei  $k$  ein auf dem  $\eta^*$ -zulässiges Paar  $(G_{t_1}, G_{t_2}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  asymptotisch glatter Kern und  $\Phi_j \subseteq G_{t_1}$  für  $j \in t_1$ . Für den Approximationsfehler  $R_{n_p} = A_0^{t_1, t_2} - \tilde{A}_0^{t_1, t_2}$  nach  $n_p$  Iterationen des Algorithmus 3.4.6 gilt*

$$\|R_{n_p}\|_F \leq \sqrt{\#t_2} \frac{c_p}{p!} (\eta^*)^p \text{dist}^q(G_{t_1}, G_{t_2}) \left( \sum_{j \in t_1} \mu^2(\Phi_j) \right)^{1/2},$$

wobei  $q < p \in \mathbb{N}$  und  $c_p$  eine Konstante ist.

**Beweis.** Wir bemerken, dass nach höchstens  $n_p$  Iterationen die Bedingung (3.7) aus Satz 3.1.8 gelte. Die Behauptung erfolgt dann analog zu dem Beweis des Satzes 3.1.5. ■

Wir geben in Abhängigkeit der Größe  $\eta^*$  den numerischen Aufwand an, der für eine gegebene Genauigkeit  $\varepsilon > 0$  den Approximationsfehler liefert:

$$\|A_0 - \tilde{A}_0\|_F \leq \varepsilon.$$

Dazu betrachten wir mit der Definition 3.1.6 der  $\eta^*$ -Zulässigkeit und der Annahme, dass eine quasi-uniforme Triangulierung (Bemerkung 1.3.6) der Oberfläche  $\Gamma_\Delta$  vorliegt, die Beziehung

$$\text{dist}^q(G_{t_1}, G_{t_2}) \leq c N^{-q/2} \quad \forall (t_1, t_2) \in Z'$$

wobei  $c > 0$  eine geeignete Konstante ist, vgl. [11]. Für den Approximationsfehler der gesamten Kollokationsmatrix  $A_0 \in \mathbb{C}^{N \times N}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \|A_0 - \tilde{A}_0\|_F^2 &= \sum_{(t_1, t_2) \in Z'} \|A_0^{t_1, t_2} - \tilde{A}_0^{t_1, t_2}\|_F^2 \\ &\leq \sum_{(t_1, t_2) \in Z'} \#t_1 \#t_2 C_p^2 (\eta^*)^{2p} \text{dist}^{2q}(G_{t_1}, G_{t_2}) \end{aligned}$$

und damit

$$\|A_0 - \tilde{A}_0\|_F \leq c C_p N^{1-q/2} (\eta^*)^p, \quad C_p = \mu(\Gamma_\Delta) \frac{C_p}{p!}.$$

Wir wählen  $\eta^* > 0$  so, dass

$$(\eta^*)^p = \frac{\varepsilon}{c C_p N^{1-q/2}}. \quad (3.26)$$

Aber dies garantiert  $\|A_0 - \tilde{A}_0\|_F \leq \varepsilon$ . Für sinnvolle Werte  $N$  und  $\varepsilon$  können wir annehmen, dass  $0 < \eta^* < 1$  ist.

Sei  $\alpha > 0$ . Mit der Beziehung (3.26) und

$$p \geq 2 \frac{2-q}{\alpha - \zeta}, \quad 0 < \zeta < \alpha,$$

ergibt sich dann die Komplexität des Algorithmus 3.2.8, die in Abschnitt 3.2 mit  $O((\eta^*)^{-4} N^{1+\zeta})$  angegeben war, zu jeweils  $O(\varepsilon^{-\alpha} N^{1+\alpha})$  Operationen und Speichereinheiten,  $\forall \alpha > 0$  beliebig klein. Offensichtlich ist der numerische Aufwand des Algorithmus 3.4.8 von der gleichen Größenordnung.

Wir bemerken, dass sich die theoretischen Aussagen nur für asymptotisch glatte Kerne zeigen lassen. Die vorgestellten Algorithmen 3.4.5 und 3.4.6 liefern jedoch auch für nicht asymptotisch glatte Kerne, die sich durch degenerierte Kerne approximieren lassen, gute numerische Ergebnisse, vgl. die numerischen Beispiele des folgenden Kapitels oder [12].





## 4 Numerische Beispiele

In diesem Kapitel stellen wir einige numerische Ergebnisse der vorgestellten effizienten Verfahren zusammen. Insbesondere untersuchen wir in Abschnitt 4.1 die Güte der Fourier-Methode und wenden in Abschnitt 4.2 zur Approximation der Matrizen das ACA-Verfahren an.

Als erstes Beispiel (**Bsp. I**) betrachten wir die zeitharmonische, akustische Streuung einer ebenen einfallenden Welle  $u^I = e^{i\kappa(y \cdot z)}$  aus der Richtung  $z^T = (1, 0, 0)$  an einer schallweichen Kugel  $\Omega = \{y \in \mathbb{R}^3, |y| < 1\}$ . Die gestreute Welle  $u^S$  erfüllt das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u^S(y) + \kappa^2 u^S(y) &= 0, & y \in \Omega^c, \\ u^S(\hat{y}) &= -u^I(\hat{y}), & \hat{y} \in \mathbb{S}^2 = \partial\Omega, \\ u^S &\text{ genügt der Sommerfeld'schen Ausstrahlungsbedingung (1.3)} \end{aligned}$$

und besitzt die Form [23]

$$u^S(y) = - \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{j_l(\kappa)}{h_l(\kappa)} h_l^{(1)}(\kappa|y|) P_l(\hat{y} \cdot z).$$

Darüber hinaus lässt sich die eindeutige Lösung  $f$  der Randintegralgleichung

$$\left( \frac{1}{2} \mathcal{I} + \mathcal{D}_\kappa + i\eta \mathcal{S}_\kappa \right) [f](\hat{y}) = -e^{i\kappa(\hat{y} \cdot z)}, \quad \eta \neq 0, \quad (4.1)$$

explizit angeben,

$$f(\hat{y}) = \sum_{l=0}^{\infty} i^{(l+1)} (2l+1) \frac{j_l(\kappa)}{\kappa(\kappa j'_l(\kappa) + i\eta j_l(\kappa)) h_l^{(1)}(\kappa)} P_l(\hat{y} \cdot z).$$

Für die folgenden Beispiele betrachten wir das äußere Dirichlet-Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u(y) + \kappa^2 u(y) &= 0, & y \in \Omega^c, \\ u(y) &= G(x_0, y, \kappa) \text{ aus (1.6) mit } x_0 \in \Omega, & y \in \Gamma, \\ u &\text{ genügt der Sommerfeld'schen Ausstrahlungsbedingung (1.3)} \end{aligned}$$

und wählen zur Formulierung der zugehörigen Randintegralgleichung die "direkte" Methode, d.h. mittels der Green'schen Darstellungsformel erhalten wir

$$\mathcal{S}_\kappa[\partial_n u](y) = g(y) = \left( -\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{D}_\kappa \right) [u](y), \quad y \in \Gamma. \quad (4.2)$$

Durch die spezielle Wahl der Randbedingung können wir die Lösung von (4.2) explizit durch  $f = \partial_n G(x_0, y, \kappa)|_{y \in \Gamma}$  angeben.

Wir wählen für den Rand  $\Gamma$  zum einen (**Bsp. II**) die parametrisierte Oberfläche

$$\Gamma_Z = \left\{ x = \begin{pmatrix} R(z) \cos(2\pi t) \\ R(z) \sin(2\pi t) (2 - \frac{3}{2} \sin(2\pi t)) \\ z \end{pmatrix}, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq t < 1 \right\},$$

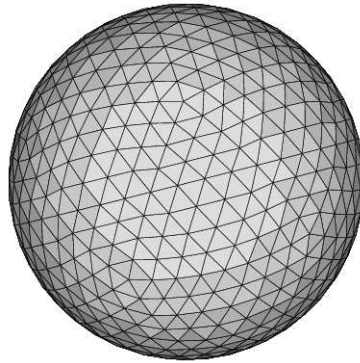
wobei  $R(z) = \sqrt{z(1-z)}$ ,

und zum anderen die dritte Beispieloberfläche  $\Gamma_R$  aus Abbildung 4.1 (**Bsp. III**).

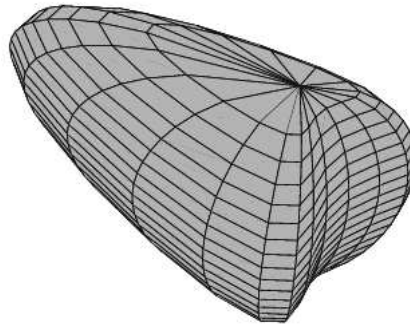
Während die ersten beiden Beispieloberflächen akademischer Natur sind und für den Diskretisierungsparameter stets  $h \leq 1$  gilt, handelt es sich bei der Oberfläche  $\Gamma_R$  um ein Gitter, das uns freundlicherweise von der Firma Robert BOSCH GmbH zur Verfügung gestellt wurde. Betrachten wir die Schallabstrahlung in Luft (Dichte  $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$  und Schallgeschwindigkeit  $c = 340 \text{ m/s}$ ), so besitzen die Wellenzahl und die Lösungen  $f_{(\cdot)}$  die Dimensionen  $m^{-1}$  bzw.  $m^{-2}$ .

Wir bemerken, dass alle Berechnungen auf einem AMD Athlon 1200 System durchgeführt und LAPACK-Routinen [5] als algebraische Bibliothek verwendet wurden.

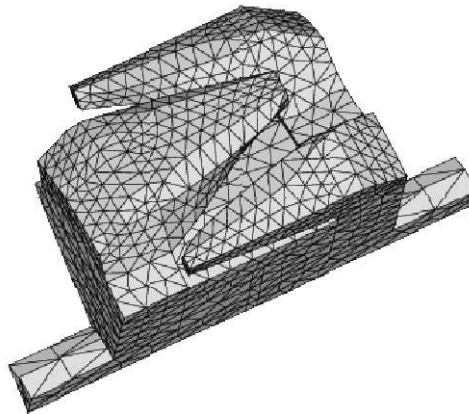
Weitere numerische Experimente bezüglich der Fourier-Methode und der Kombination mit dem ACA-Verfahren findet der interessierte Leser in [61], [82] oder [71].



(I) Einheitssphäre:  $\mathbb{S}^2$



(II) Testrand 2:  $\Gamma_Z$



(III) Testrand 3:  $\Gamma_R$  mit  $\text{diam}(\Gamma_R) = 0.8\,m$

Abbildung 4.1: Die Beispieloberflächen

---

## 4.1 Der Vergleich der Lösungen

Um das neue Verfahren zu validieren, betrachten wir neben der in Abschnitt 2.2 beschriebenen Fourier-Methode ein Standard-Verfahren. Dazu werden die aus dem Kollokationsverfahren mit stückweise konstanten Ansatzfunktionen resultierenden Matrizeneinträge mittels der 7-Punkt Gauß-Formel für ebene Dreiecke mit der Genauigkeit  $O(h^6)$  numerisch berechnet, vgl. [2].

Die vorgestellten Beispiele liefern folgende Ergebnisse:

In den Abbildungen 4.2 (a) - 4.4 (a) sind die relativen Fehler der Fourier-Lösung  $f_{FT}$  (schwarz) und der Standard-Lösung  $f_{ST}$  (punktiert) in der diskreten  $\mathbb{L}_2$ -Norm in Abhängigkeit der Wellenzahl  $\kappa$  dargestellt, d.h.

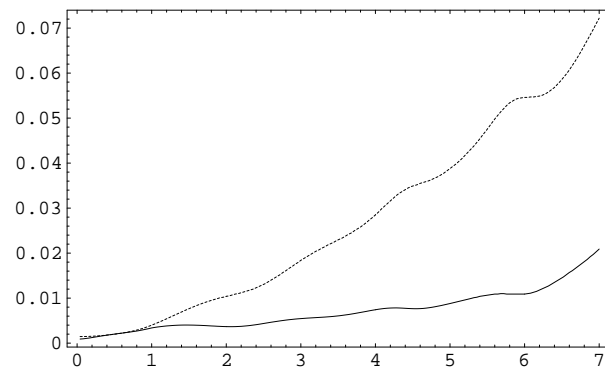
$$e_{rel}(f_{(\cdot)}) = \frac{\|f - f_{(\cdot)}\|_{\mathbb{L}_2(\Gamma)}}{\|f\|_{\mathbb{L}_2(\Gamma)}}.$$

Der Anstieg des Fehlers des Standard-Verfahrens mit wachsender Wellenzahl ist auf die verwendete Integrationsroutine mit konstantem numerischem Aufwand zurückzuführen. Die Ergebnisse könnten durch Einsatz einer genaueren Quadraturformel verbessert werden, der numerische Aufwand wäre jedoch höher. Im Fall der Fourier-Methode erhalten wir Matrizeneinträge mit einer Genauigkeit, die im Wesentlichen unabhängig von der Wellenzahl ist, vgl. Bemerkung 2.2.7. Diese Eigenschaft spiegelt sich in dem nahezu konstanten Fehlerverhalten für  $\kappa_{max}h < 1$  wider. Darüber hinaus benötigt die analytische Berechnung der Integrale, die nur von den geometrischen Daten abhängt, stets den gleichen numerischen Aufwand.

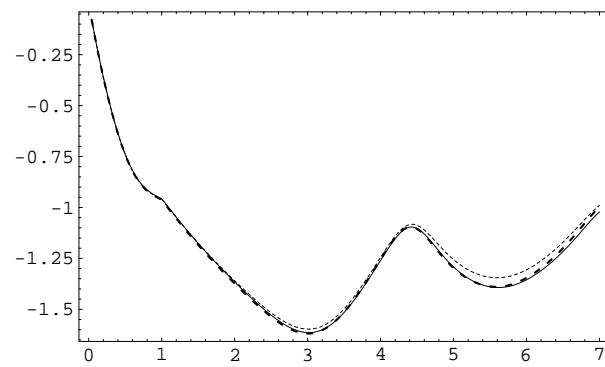
Um die gute Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse  $f_{FT}$  mit den analytischen Werten zu verdeutlichen, sind in den Abbildungen 4.2 (b) - 4.4 (b) jeweils eine Komponente der Lösungsvektoren (d.h. Realteil und Imaginärteil) gegen die Wellenzahl aufgetragen. Die Lösungen  $f_{FT}$  und  $f_{ST}$  sind schwarz bzw. punktiert dargestellt, die gestrichelte Linie entspricht dem Verlauf der analytischen Lösung  $f$ .

Wir weisen noch auf eine Eigenart der Lösung  $f_{FT}$  hin, welche im dritten Beispiel besonders deutlich wird. Ab  $\kappa = 45$  ist die Kurve nicht mehr glatt, sondern weist für gewisse Wellenzahlen Zacken auf. Dieser Effekt resultiert aus der Tatsache, dass für die Randintegralgleichung (4.2) irreguläre Wellenzahlen auftreten können, vgl. Tabelle 1.1 und die entsprechenden Lösungen nicht mehr eindeutig sind.

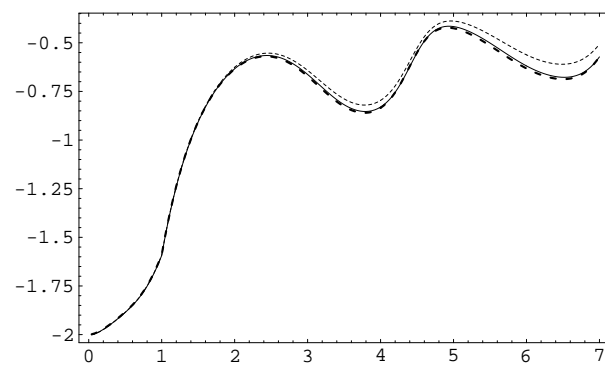
(a) Relativer  $\mathbb{L}_2$ -Fehler der Lösungen  $f_{FT}$  und  $f_{ST}$  in Abhängigkeit von  $\kappa$



(b) Verlauf der Lösungen in Abhängigkeit von  $\kappa$



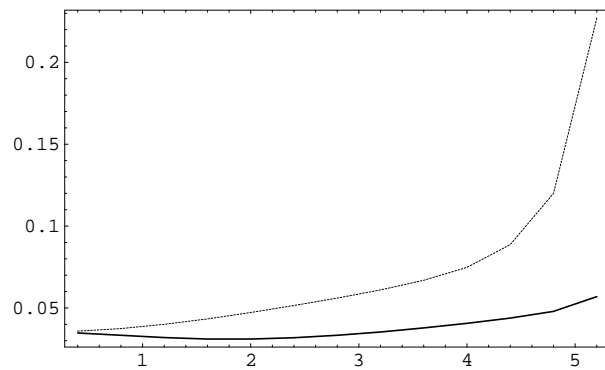
Realteil



Imaginärteil

Abbildung 4.2: Ergebnisse für **Beispiel I**

(a) Relativer  $\mathbb{L}_2$ -Fehler der Lösungen  $f_{FT}$  und  $f_{ST}$  in Abhängigkeit von  $\kappa$



(b) Verlauf der Lösungen in Abhängigkeit von  $\kappa$

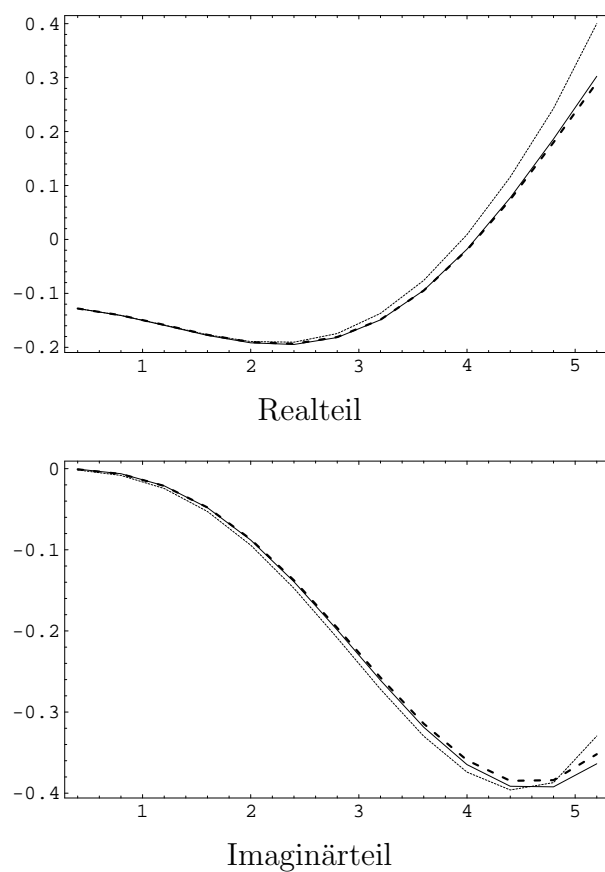
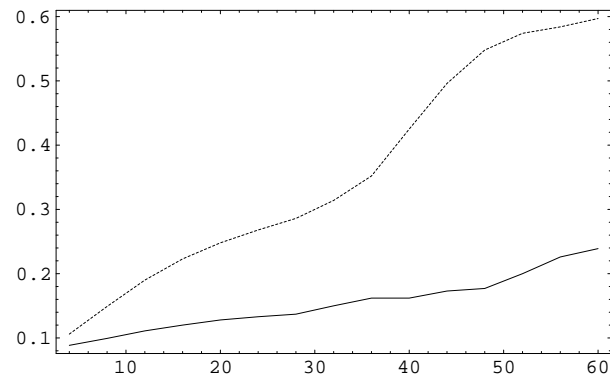


Abbildung 4.3: Ergebnisse für **Beispiel II**

(a) Relativer  $\mathbb{L}_2$ -Fehler der Lösungen  $f_{FT}$  und  $f_{ST}$  in Abhängigkeit von  $\kappa$



(b) Verlauf der Lösungen in Abhängigkeit von  $\kappa$

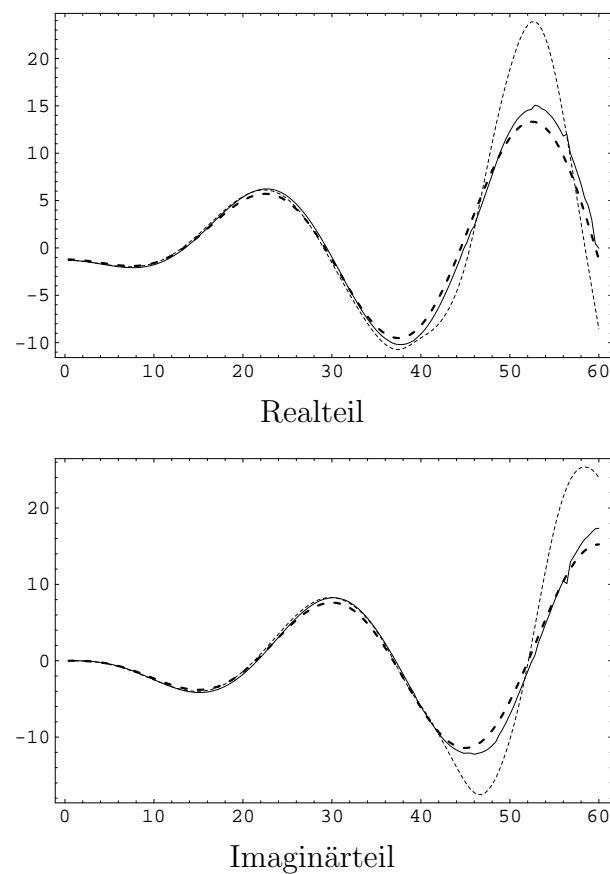


Abbildung 4.4: Ergebnisse für **Beispiel III**

Darüber hinaus stellt die Fourier-Methode ein sehr effektives Verfahren dar. Dazu werden für  $N_\kappa = 100$  Wellenzahl die Gesamtzeiten zur Lösung des Gleichungssystems,  $LS$ , und die Zeiten zur Generierung der Kollokationsmatrizen  $C = A_\kappa, S_\kappa, D_\kappa$  der beiden Verfahren verglichen. Die CPU-Zeiten in den Tabellen 4.1 sind in *Sek.* angegeben. Im Fall der Fourier-Methode bezeichnet  $\Psi$  die einmalige Berechnungszeit der von  $\kappa$  unabhängigen Daten  $\beta, \gamma, \alpha, \sigma$  aus Bemerkung 2.2.7. Wir bemerken, dass die Zeiten zur Generierung der Kollokationsmatrizen den größten Anteil in der Gesamtberechnungszeiten darstellen.

<b>Bsp. I</b>	$N$	Standard		Fourier		
		$A_\kappa$	$LS$	$A_\kappa$	$LS$	$\Psi$
	80	17	17	12	12	0.11
	320	225	233	122	131	1.17
	1280	3540	4020	1810	2290	18.1

<b>Bsp. II</b>	$N$	Standard			Fourier			
		$D_\kappa$	$S_\kappa$	$LS$	$D_\kappa$	$S_\kappa$	$LS$	$\Psi$
	64	7	4	12	4	3	7	0.09
	256	71	71	147	31	48	84	0.75
	1024	1090	1140	2700	420	750	1620	11.5

<b>Bsp. III</b>	1356	1970	2030	4570	760	1340	2660	21
-----------------	------	------	------	------	-----	------	------	----

Tabelle 4.1: Vergleich der Berechnungszeiten

## 4.2 Die Anwendung des ACA-Verfahrens

Wir approximieren die in Gleichungssystemen (4.1) und (4.2) auftretenden Matrizen, indem gemäß Abschnitt 3.2 ein Clusterbaum erzeugt und die Matrizen entsprechend partitioniert werden. Auf jeden  $\eta^*$ -zulässigen Block wird das vorgestellte komplexwertige ACA-Verfahren angewendet und dabei die Matrixeinträge mit der Fourier-Methode ausgewertet.

Insbesondere untersuchen wir die Effizienz des ACA-Verfahrens mit einer partiellen Pivotisierung und wenden den Algorithmus 3.4.6 auf eine Oberflächen-Sequenz an.



Dabei verstehen wir im Fall der Einheitssphäre, dass jedes Dreieck geviertelt und die neuen Dreiecke auf  $\mathbb{S}^2$  projiziert werden. Im Fall der parametrisierten Oberfläche ergibt sich eine Sequenz aus dem geschickten Hochsetzen der Diskretisierungsgrößen  $N_t$ ,  $N_z$  mit  $N = 2N_t(N_z - 1)$ . Für den dritten Testrand werden analog zu oben die Dreieckselemente geviertelt.

Speziell werden  $\eta^* = 0.8$ , der Approximationsfehler  $\varepsilon$  aus (3.25) mit  $10^{-4}$  und  $10^{-6}$  für den relativen Fehler des nicht vorkonditionierten GMRES gewählt.

Anhand der **Beispiele I - III** untersuchen wir das Verhalten des sogenannten Kompressionsfaktors,

$$CF(A) = \frac{Mem(\tilde{A})}{Mem(A)} \quad (\%),$$

in Abhängigkeit der Wellenzahl.

Der monotone Anstieg der Kompressionsfaktoren der Matrizen,  $A_\kappa$  (schwarz) bzw.  $S_\kappa$  (schwarz) und  $D_\kappa$  (gestrichelt), bei wachsender Wellenzahl in Abhängigkeit der Dimension  $N$  ist in den Abbildungen 4.5 dargestellt. Dabei entsprechen die Kurven jeweils von oben nach unten den Fällen

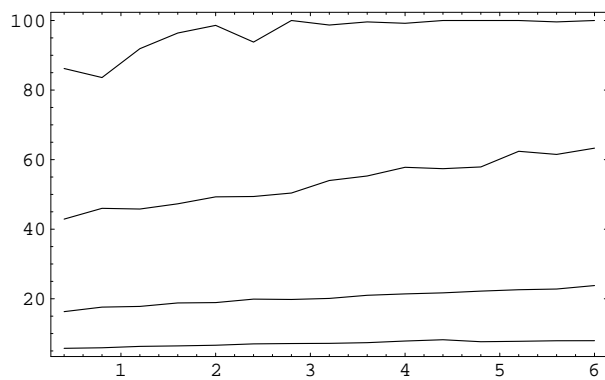
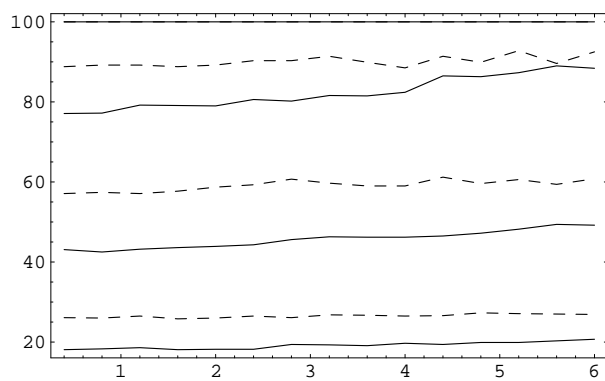
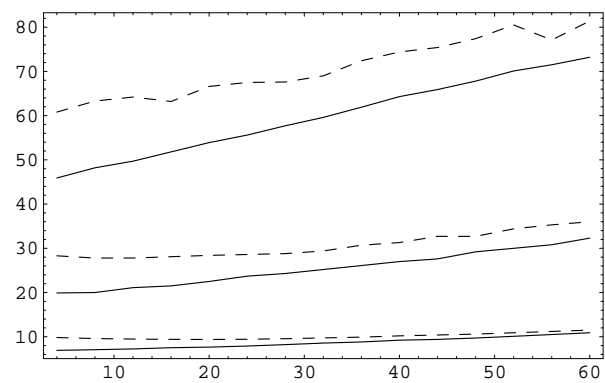
$$\begin{aligned} \mathbb{S}^2 : \quad & N = 80, N = 320, N = 1280, N = 5120, \\ \Gamma_Z : \quad & N = 64, N = 256, N = 1024, N = 4096, \\ \Gamma_R : \quad & N = 1356, N = 5424, N = 21696. \end{aligned}$$

In Tabelle 4.2 sind die Kompressionsfaktoren und die Fehler der Fourier-Lösung  $f_{FT}$  im sogenannten prä-asymptotischen Bereich, d.h.  $e(f_{FT})$  und  $e_{rel}(f_{FT})$  für konstante  $\kappa \cdot h$ , dargestellt. Wir können für alle Experimente feststellen, dass das ACA-Verfahren kombiniert mit der Fourier-Methode stabile Werte liefert.

Abschließend untersuchen wir die Konvergenz der Fourier-Lösung im asymptotischen Bereich, d.h. der Diskretisierungsparameter  $h$  strebt für eine fest gewählte Wellenzahl  $\kappa$  gegen Null. Die Tabelle 4.3 zeigt, dass wir für das Streuproblem (**Bsp. I**) ein Konvergenzverhalten von etwa  $O(h^2)$  erhalten.

Zusammenfassend bemerken wir, dass in beiden Bereichen das ACA-Verfahren ein fast lineares Verhalten aufweist.

Während sich die asymptotisch schlechte Konditionierung der Gleichungssysteme (4.2) in den **Beispielen II** und **III** in dem Anstieg der GMRES-Iterationen widerspiegelt, kann ebenso deutlich die von  $h$  unabhängige Konditionszahl  $\text{cond}_2(A_\kappa)$  mit  $A_\kappa$  aus (4.1) abgelesen werden.

**Bsp. I****Bsp. II****Bsp. III**Abbildung 4.5: Verhalten von  $CF$  in Abhängigkeit von  $\kappa$

$N$	$\kappa$	$CF(A_\kappa)$	$e(f_{FT})$	$e_{rel}(f_{FT})$	$\#It.$
80	0.62	100	2.7E-01	3.74E-02	4
320	1.20	92	1.05E-01	1.54E-02	5
1280	2.28	49	2.65E-02	4.25E-03	5
5120	4.60	22	1.16E-02	2.24E-03	6
20480	9.24	8	1.93E-02	3.87E-03	9

**Bsp. I:**  $\kappa \cdot h \approx 0.36$

$N$	$\kappa$	$CF(S_\kappa)$	$CF(D_\kappa)$	$e(f_{FT})$	$e_{rel}(f_{FT})$	$\#It.$
64	0.60	100	100	7.24E-02	1.16E-01	11
256	0.92	77	88	4.37E-02	7.48E-02	17
1024	1.76	43	59	2.09E-02	3.05E-02	22
4096	3.44	19	26	2.67E-02	2.59E-02	32
16384	6.68	7	9	5.78E-02	3.16E-03	59

**Bsp. II:**  $\kappa \cdot h \approx 0.25$

$N$	$\kappa$	$CF(S_\kappa)$	$CF(D_\kappa)$	$e(f_{FT})$	$e_{rel}(f_{FT})$	$\#It.$
1356	11	50	64	6.52E-02	1.08E-01	38
5424	23	23	28	9.34E-02	1.15E-01	66
21696	46	9	10	3.18E-01	2.27E-01	150

**Bsp. III:**  $\kappa \cdot h \approx 0.5$

Tabelle 4.2: Verhalten für verschiedene  $\kappa$

$N$	$\kappa h$	$CF(A_\kappa)$	$e(f_{FT})$	$e_{rel}(f_{FT})$	$\#It.$
80	0.97	100	3.91E-01	6.14E-02	5
320	0.5	93	1.07E-01	1.62E-02	5
1280	0.25	46	2.75E-02	4.09E-03	5
5120	0.125	18	6.96E-03	1.03E-03	5
20480	0.065	6	1.93E-03	2.86E-04	4

Tabelle 4.3: Verhalten für  $\kappa = \pi/2$  (**Bsp. I**)



# A Anmerkungen zur Helmholtz-Gleichung

## A.1 Der zweidimensionale Fall

Wir betrachten die äußeren Randwertprobleme der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung, d.h. finde  $u(y)$ , so dass gilt

$$\begin{aligned}\Delta u(y) + \kappa^2 u(y) &= 0, & y \in \Omega^c \subset \mathbb{R}^2, \\ u(y) &= u_D(y) \text{ bzw. } \partial_n u(y) = u_N(y), & y \in \partial\Omega \subset \mathbb{R},\end{aligned}$$

und  $u(y)$  genügt der Sommerfeld'schen Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} - i\kappa \right) u(y) = 0, \quad r = |y|, \quad y \in \mathbb{R}^2,$$

gleichmäßig in alle Richtungen  $y/|y|$ .

Mit der Singularitäten-Funktion

$$G(x, y, \kappa) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa|x - y|), \quad x \neq y,$$

lassen sich die Randintegralgleichungen analog zu denen aus Abschnitt 1.2 formulieren und entsprechend mit Randelementmethoden lösen.

Im Fall  $\kappa = 0$  ergibt sich das Laplace-Problem mit

$$G(x, y, 0) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|x - y|), \quad x \neq y.$$

---

## A.2 Die Herleitung der Wellengleichung

Wir betrachten die Ausbreitung akustischer Wellen in einem isotropen, homogenen, reibungsfreien Fluid im  $\mathbb{R}^3$ . Die Herleitung der Wellengleichung orientiert sich an den Ausführungen in [23].

Seien dazu  $v = v(y, t)$  das Geschwindigkeitsfeld,  $p = p(y, t)$  der Druck und  $\rho = \rho(y, t)$  die Dichte des Mediums. Fassen wir diese Größen als kleine Abweichungen des stationären Zustandes,  $v_0 = 0$ ,  $p_0 = \text{const.}$  und  $\rho_0 = \text{const.}$ , auf, so wird die Bewegung innerhalb des Mediums mittels der linearisierten Eulergleichung

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} v + \nabla p = 0, \quad (\text{A.1})$$

der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho_0 \operatorname{div} v = 0$$

und der (angenäherten) Zustandsgleichung  $p = c^2 \rho$  beschrieben.

Die linearisierte Eulergleichung (A.1) garantiert die Existenz eines Potentials  $U(y, t)$  mit

$$v = \frac{1}{\rho_0} \nabla U \quad \text{und} \quad p = -\frac{\partial}{\partial t} U.$$

Setzen wir die Darstellungen von  $v$  und  $p$  in die obigen Gleichungen ein, so erhalten wir die Wellengleichung für das Potential  $U$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(y, t) - \Delta U(y, t) = 0.$$

Wir bemerken, dass die Schallgeschwindigkeit  $c$  in einem idealen Gases gemäß

$$c = \sqrt{\chi \frac{p_0}{\rho_0}}$$

definiert ist. Dabei bezeichnet  $\chi$  den Adiabatenexponenten, insbesondere gilt für Luft  $\chi = 1.4$ .

### A.3 Die räumliche Fourier-Transformation

Wir zeigen zwei Möglichkeiten auf, die räumliche Fourier-Transformierten der Singularitäten-Funktion  $G(x, y, \kappa)$  zu bestimmen.

Da aus der Darstellung (1.6) die Beziehung  $G(x, y, \kappa) = G(x - y, 0, \kappa)$  gilt, können wir die Fourier-Transformierten der Funktion  $G(x - y, \kappa)$  bezüglich  $z = x - y \in \mathbb{R}^3$  über

$$\begin{aligned}\hat{G}(\zeta, \kappa) &= \int_{\mathbb{R}^3} G(z, \kappa) e^{i(\zeta, z)} dz, \quad \zeta \in \mathbb{R}^3, \\ (2\pi)^3 \check{G}(\zeta^*, \kappa) &= \int_{\mathbb{R}^3} G(z, \kappa) e^{-i(\zeta^*, z)} dz, \quad \zeta^* \in \mathbb{R}^3,\end{aligned}$$

direkt auswerten.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Singularitäten-Funktion als Lösung der Gleichung

$$(\Delta + \kappa^2) G(x - y, \kappa) = -\delta(x - y)$$

zu betrachten. Sei zunächst  $\kappa = \kappa_r + i\kappa_i \in \mathbb{C}$  mit  $\kappa_r, \kappa_i > 0$ . Mit dem Differentiationssatz der Fourier-Transformation (vgl. Satz 2.1.4) und der Bemerkung 2.1.6 ergibt sich

$$(-|\zeta|^2 + \kappa^2) \hat{G}(\zeta, \kappa) = -1 \quad \text{bzw.} \quad (-|\zeta^*|^2 + \kappa^2) \check{G}(\zeta^*, \kappa) = -\frac{1}{(2\pi)^3}$$

und damit

$$\hat{G}(\zeta, \kappa) = \frac{1}{|\zeta|^2 - \kappa^2} \quad \text{bzw.} \quad \check{G}(\zeta^*, \kappa) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\zeta^*|^2 - \kappa^2}.$$

Wir bemerken, dass die Funktionen in der Halbebene  $\kappa_i > 0$  analytisch sind.

Um  $\hat{G}$  und  $\check{G}$  auf die reelle Achse ( $\kappa_i = 0$ ) fortzusetzen, betrachten wir den Grenzwert  $\lim_{\kappa_i \rightarrow 0} (r^2 - \kappa^2)^{-1}$  und beachten, dass für kleine  $\kappa_i$  gilt

$$\frac{1}{r^2 - \kappa_r^2 + \kappa_i^2 - 2i\kappa_r\kappa_i} = \frac{r^2 - \kappa_r^2 + \kappa_i^2}{(r^2 - \kappa_r^2)^2 + 4\kappa_r^2\kappa_i^2} + i \frac{2\kappa_r\kappa_i}{(r^2 - \kappa_r^2)^2 + 4\kappa_r^2\kappa_i^2}.$$

Nutzen wir für den zweiten Summanden die der Beziehung [37]

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{x^2 + y^2} = \pi \delta(x)$$

aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa_i \rightarrow 0} \frac{1}{r^2 - \kappa^2} &= \frac{1}{r^2 - \kappa_r^2} + i\pi\delta(r^2 - \kappa_r^2) \\ &= \frac{1}{r^2 - \kappa_r^2} + i\frac{\pi}{2\kappa_r}\delta(r - \kappa_r) .\end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung benutzen wir die Beziehung (2.6) für  $g = r^2 - \kappa_r^2$  und  $\kappa_r > 0$ .

Die Funktionen  $\hat{G}$  und  $\check{G}$  besitzen also die folgenden Fortsetzungen für  $\kappa_i = 0$

$$\begin{aligned}\hat{G}(\zeta, \kappa) &= pv \frac{1}{|\zeta|^2 - \kappa^2} + i\frac{\pi}{2\kappa}\delta(|\zeta| - \kappa) \\ \check{G}(\zeta^*, \kappa) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \left( pv \frac{1}{|\zeta^*|^2 - \kappa^2} + i\frac{\pi}{2\kappa}\delta(|\zeta^*| - \kappa) \right) .\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $pv$  den Cauchy-Hauptwert (principle value).

---



## B Spezielle Funktionen

Wir stellen einige Definitionen und Eigenschaften der Legendre- und Kugelflächenfunktionen sowie der sphärischen Funktionen zusammen. Eine ausführliche Darstellung findet der interessierte Leser z.B. in [2] oder [67].

### B.1 Legendre- und Kugelflächenfunktionen

Wir betrachten  $\hat{x} = x/|x| \in \mathbb{S}^2$ , d.h.  $\hat{x} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)^T$  mit  $\phi \in [0, 2\pi)$  und  $\theta \in [0, \pi]$  und geben für  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $|m| \leq n$  und  $t = \cos \phi$

1. die Legendre-Polynome der Ordnung  $n$

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (1 - t^2)^n, \quad (\text{B.1})$$

2. die zugeordneten Legendre-Polynome

$$P_n^{|m|}(t) = (1 - t^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{dt^{|m|}} P_n(t), \quad (\text{B.2})$$

3. die Kugelflächenfunktionen  $Y_n^m(\hat{x}) = Y_n^m(\theta, \phi)$  mit

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (\text{B.3})$$

an.

Die Legendre-Polynome, die auch rekursiv gemäß

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1 \\ P_1(t) &= t \\ P_{n+1}(t) &= (2n+1)P_n(t) - nP_{n-1}(t), \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

gewonnen werden, bilden ein vollständiges Orthogonalsystem in  $\mathbb{L}_2([-1, 1])$  und es gilt die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Dabei bezeichnet  $\delta$  wie üblich das Kroneckersymbol.

Darüber hinaus gelten die Abschätzungen

$$|P_n(t)| \leq 1, \quad |P'_n(t)| \leq \frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{sowie} \quad |P_n^{(1)}(t)| \leq \pi(n+1),$$

vgl. [38].

Der folgende Satz ist unter anderen in [23] gezeigt.

**Satz B.1.1** *Seien  $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{S}^2$ . Für die Kugelflächenfunktionen  $Y_n^m$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $|m| \leq n$ , die ein vollständiges Orthogonalsystem in  $\mathbb{L}_2(\mathbb{S}^2)$  bilden, gilt das Additionstheorem*

$$\sum_{n=-m}^m Y_n^m(\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{y})} = \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\hat{x} \cdot \hat{y}).$$

## B.2 Sphärische Funktionen

Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Wir betrachten

1. die sphärischen Besselfunktionen

$$j_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{n+2k}}{2^k k! 1 \cdot 3 \cdots (2n+2k+1)},$$

2. die sphärischen Neumannfunktionen

$$y_n(x) = -\frac{(2n)!}{2^n n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-n-1}}{2^k k! (-2n+1)(-2n+3) \cdots (-2n+2k-1)},$$

3. die sphärischen Hankelfunktionen erster bzw. zweiter Art

$$h_n^{(1,2)}(x) = j_n(x) \pm i y_n(x).$$

und bemerken, dass die Funktionen  $j_n$  für  $x \in \mathbb{R}$  und  $y_n$  für  $x \in (0, \infty)$  analytisch sind.

Die Funktionen  $q_n$  mit  $q_n = j_n$ ,  $q_n = y_n$  bzw.  $q_n = h_n^{(\cdot)}$  genügen der Rekursionsformel

$$q_{n+1}(x) + q_{n-1}(x) = \frac{2n+1}{x} q_n(x), \quad n \geq 1,$$

und für ihre Ableitungen ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} q'_n(x) &= \frac{n}{2n+1} q_{n-1}(x) - \frac{n+1}{2n+1} q_{n+1}(x) \\ &= q_{n-1}(x) - \frac{n+1}{x} q_n(x) \\ &= \frac{n}{x} q_n(x) - q_{n+1}(x) \end{aligned}$$

In unseren Ausführungen benutzen wir außerdem die Relationen

$$q_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Q_{n+1/2}(x),$$

wobei  $Q_n = J_n, Y_n, H_n^{(1,2)}$  die Bessel-, Neumann- und Hankelfunktionen erster und zweiter Art bezeichnen.

Die sphärischen Funktionen lassen sich durch trigonometrische Funktionen ausdrücken

$$j_n(x) = x^n \left( -x \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sin x}{x} \quad \text{und} \quad y_n(x) = -x^n \left( -x \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\cos x}{x}.$$

Insbesondere gilt

$$h_0^{(1,2)}(x) = \frac{e^{\pm ix}}{\pm ix}.$$

Abschließend geben wir das asymptotische Verhalten für  $n \rightarrow \infty$  an, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} j_n(x) &= \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ h_n^{(1)}(x) &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{ix^{n+1}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \end{aligned}$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}$  bzw.  $(0, \infty)$ .



## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Lösung der äußeren Randwertprobleme der Helmholtz-Gleichung mit schnellen Randelementmethoden diskutiert. Insbesondere standen die Generierung der Kollokationsmatrizen und die blockweise Niedrigrang-Approximation dieser im Mittelpunkt unseres Interesses.

Zunächst stellten wir die sogenannte Fourier-Methode zur Auswertung der Matrizeneinträge für ein Spektrum aus Wellenzahlen vor. Das auf der Fourier-Transformation bezüglich der Wellenzahl basierende Verfahren wurde auf die Einfach- und Doppelschichtpotentialmatrizen angewendet und anhand einiger numerischer Experimente validiert. Wir zeigten, dass die geschickte Anwendung der Fourier-Transformation und die Rücktransformation auf die Singularitäten-Funktionen ein sehr effizientes und stabiles Verfahren zur teilweisen analytischen Berechnung der auftretenden Integrale darstellt.

In analoger Weise können auch Ausdrücke für die anderen Randintegraloperatoren bzw. die entsprechenden Kollokationsmatrizen gefunden werden. Detaillierte Untersuchungen dieser sowie der Galerkin-Matrizen stehen jedoch noch aus.

Darüber hinaus entwickelten wir das ACA-Verfahren (Adaptive Cross Approximation) zur blockweisen Niedrigrang-Approximation von Matrizen weiter. Nach der Erzeugung einer zulässigen hierarchischen Zerlegung der Matrix wurde der Algorithmus formal auf die komplexwertigen Kollokationsmatrizen der Helmholtz-Gleichung angepasst.

Numerische Tests zeigten, dass dieses Verfahren für nicht asymptotisch glatte Kerne, die sich durch degenerierte Kerne approximieren lassen, gute Ergebnisse liefert.

Zur Zeit können theoretische Aussagen über die Konvergenz und Komplexität der Methode jedoch nur für asymptotisch glatte Kerne gezeigt werden.

---



## Literaturverzeichnis

- [1] T. Abboud, J.-C. Nédélec, and B. Zhou. Méthode des équations intégrales pour les hautes fréquences. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(2):165–170, 1994.
  - [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun, editors. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Publications Inc., New York, 1992. Reprint of the 1972 edition.
  - [3] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
  - [4] H. Ammari and J.-C. Nédélec. Full low-frequency asymptotics for the reduced wave equation. *Appl. Math. Lett.*, 12(1):127–131, 1999.
  - [5] E. Anderson et al. *LAPACK users' guide*, volume 9 of *Software, Environments, and Tools*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, third edition, 1999.
  - [6] D. N. Arnold and W. L. Wendland. On the asymptotic convergence of collocation methods. *Math. Comp.*, 41(164):349–381, 1983.
  - [7] A. K. Aziz, editor. *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations*. Academic Press, New York, 1972.
  - [8] I. M. Babuška and S. A. Sauter. Is the pollution effect of the FEM avoidable for the Helmholtz equation considering high wave numbers? *SIAM Rev.*, 42(3):451–484 (electronic), 2000. Reprint of SIAM J. Numer. Anal. **34** (1997), no. 6, 2392–2423 [MR 99b:65135].
  - [9] A. Bamberger and T. Ha Duong. Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé de la diffraction d'une onde acoustique. I. *Math. Methods Appl. Sci.*, 8(3):405–435, 1986.
-

- [10] M. Bebendorf. Approximation of boundary element matrices. *Numer. Math.*, 86(4):565–589, 2000.
  - [11] M. Bebendorf. *Effiziente numerische Lösung von Randintegralgleichungen unter Verwendung von Niedrigrang-Matrizen*. dissertation.de, Verlag im Internet, 2001.
  - [12] M. Bebendorf and S. Rjasanow. Matrix compression for the radiation heat transfer in exhaust pipes. In *Sändig, A.-M. (ed.) et al., Multifield problems. State of the art.*, volume 414, pages 183–192. Springer, Berlin, 2000.
  - [13] M. Bebendorf and S. Rjasanow. Adaptive low-rank approximation of collocation matrices. *Computing*, 70(1):1–24, 2003.
  - [14] J.-D. Benamou, F. Castella, T. Katsaounis, and B. Perthame. High frequency limit of the Helmholtz equations. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 18(1):187–209, 2002.
  - [15] H. Brakhage and P. Werner. Über das Dirichletsche Aussenraumproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung. *Arch. Math.*, 16:325–329, 1965.
  - [16] A. Brandt. Multilevel computations of integral transforms and particle interactions with oscillatory kernels. *Comput. Phys. Comm.*, 65(1-3):24–38, 1991.
  - [17] O. P. Bruno and L. A. Kunyansky. A fast, high-order algorithm for the solution of surface scattering problems: basic implementation, tests, and applications. *J. Comput. Phys.*, 169(1):80–110, 2001.
  - [18] G. Chen and J. Zhou. *Boundary element methods*. Academic Press Ltd., London, 1992.
  - [19] H. Cheng, L. Greengard, and V. Rokhlin. A fast adaptive multipole algorithm in three dimensions. *J. Comput. Phys.*, 155(2):468–498, 1999.
  - [20] S. H. Christiansen and J.-C. Nédélec. Des préconditionneurs pour la résolution numérique des équations intégrales de frontière de l’acoustique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(7):617–622, 2000.
  - [21] I. Y. Chudinovich and S. Dieng. Les méthodes de la théorie des potentiels dans les problèmes de la diffraction des ondes acoustiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(7):885–889, 1995.
-



- 
- [22] D. Colton and R. Kress. *Integral equation methods in scattering theory*. Krieger Publishing Company, Malabar, 1992.
  - [23] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.
  - [24] M. Costabel. Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results. *SIAM J. Math. Anal.*, 19(3):613–626, 1988.
  - [25] M. Costabel and W. L. Wendland. Strong ellipticity of boundary integral operators. *J. Reine Angew. Math.*, 372:34–63, 1986.
  - [26] W. Dahmen, B. Kleemann, S. Prössdorf, and R. Schneider. Multiscale methods for the solution of the Helmholtz and Laplace equations. In *Boundary element topics (Stuttgart, 1995)*, pages 189–219. Springer, Berlin, 1997.
  - [27] G. Dassios and R. Kleinman. *Low frequency scattering*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000. Oxford Science Publications.
  - [28] P. J. Davies. Numerical stability and convergence of approximations of retarded potential integral equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(3):856–875, 1994.
  - [29] P. J. Davies and D. B. Duncan. Averaging techniques for time-marching schemes for retarded potential integral equations. *Appl. Numer. Math.*, 23(3):291–310, 1997.
  - [30] A. Deraemaeker, I. M. Babuška, and Ph. Bouillard. Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 46(4):471–499, 1999.
  - [31] F. Duddeck. *Fourier BEM*, volume 5 of *Lecture Notes in Applied Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Generalization of boundary element methods by Fourier transform.
  - [32] R. Duduchava. The Green formula and layer potentials. *Integral Equations Operator Theory*, 41(2):127–178, 2001.
  - [33] H. C. Elman, O. G. Ernst, and D. P. O’Leary. A multigrid method enhanced by Krylov subspace iteration for discrete Helmholtz equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 200x. to appear.
-

- 
- [34] H. C. Elman and D. P. O’Leary. Efficient iterative solution of the three-dimensional Helmholtz equation. *J. Comput. Phys.*, 142(1):163–181, 1998.
  - [35] M. A. Epton and B. Dembart. Multipole translation theory for the three-dimensional Laplace and Helmholtz equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16(4):865–897, 1995.
  - [36] A. Figueiredo, S. Sipcic, and L. Morino. Kirchhoff integral equation: Instability issues introduced by the spacial discretization. In *Proceedings of the AIAA 14th Aeroacoustic Conference, Aachen 1992*, pages 39–45. DGLR, 1992.
  - [37] I. M. Gelfand and G. E. Schilow. *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen). I: Verallgemeinerte Funktionen und das Rechnen mit ihnen*. Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 47. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.
  - [38] K. Giebermann. *Schnelle Summationsverfahren zur numerischen Lösung von Integralgleichungen für Streuprobleme im  $\mathbb{R}^3$* . Dissertation, Universität Karlsruhe, 1997.
  - [39] J. Giroire. Integral equation methods for the Helmholtz equation. *Integral Equations Operator Theory*, 5(4):506–517, 1982.
  - [40] J. Giroire and J.-C. Nédélec. Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potential. *Math. Comp.*, 32(144):973–990, 1978.
  - [41] S. A. Goreinov. Mosaic-skeleton approximation of matrices generated by asymptotically smooth and oscillatory kernels. In *Tyrtysnikov (ed.) Matrix Methods and Algorithms*, pages 42–76. INM RAS, Moscow, 1999. (in Russian).
  - [42] S. A. Goreinov and E. E. Tyrtysnikov. The maximal-volume concept in approximation by low-rank matrices. In *Structured matrices in mathematics, computer science, and engineering, I (Boulder, CO, 1999)*, volume 280 of *Contemp. Math.*, pages 47–51. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
  - [43] S. A. Goreinov, E. E. Tyrtysnikov, and N. L. Zamarashkin. A theory of pseudoskeleton approximations. *Linear Algebra Appl.*, 261:1–21, 1997.
-

- 
- [44] T. Ha-Duong. Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé de la diffraction d'une onde acoustique. I. *Z. Angew. Math. Mech.*, 76(Suppl.2):261–264, 1996.
  - [45] T. Ha-Duong, B. Ludwig, and I. Terrasse. A Galerkin BEM for transient acoustic scattering by an absorbing obstacle. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 57(13):1845–1882, 2003.
  - [46] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner Studienbücher Mathematik. B. G. Teubner, Stuttgart, zweite Auflage edition, 1996.
  - [47] W. Hackbusch. *Integralgleichungen*. Teubner Studienbücher Mathematik. B. G. Teubner, Stuttgart, zweite Auflage edition, 1997.
  - [48] W. Hackbusch. A sparse matrix arithmetic based on  $\mathcal{H}$ -matrices. I. Introduction to  $\mathcal{H}$ -matrices. *Computing*, 62(2):89–108, 1999.
  - [49] W. Hackbusch. Panel Clustering Techniques and Hierarchical Matrices for BEM and FEM. *Technical Report Max-Planck-Institut, Leipzig*, 71, 2003.
  - [50] W. Hackbusch and B. N. Khoromskij. A sparse  $\mathcal{H}$ -matrix arithmetic. II. Application to multi-dimensional problems. *Computing*, 64(1):21–47, 2000.
  - [51] W. Hackbusch, C. Lage, and S. A. Sauter. On the efficient realization of sparse matrix techniques for integral equations with focus on panel clustering, cubature and software design aspects. In *Boundary element topics (Stuttgart, 1995)*, pages 51–75. Springer, Berlin, 1997.
  - [52] W. Hackbusch and Z. P. Nowak. On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering. *Numer. Math.*, 54(4):463–491, 1989.
  - [53] W. Hackbush and S. A. Sauter. On the efficient use of the Galerkin method to solve Fredholm integral equations. In *Proceedings of ISNA '92—International Symposium on Numerical Analysis, Part I (Prague, 1992)*, volume 38, pages 301–322, 1993.
  - [54] R. Hiptmair. Coercive combined field integral equations. *J. Numer. Math.*, 11(2):115–133, 2003.
  - [55] R. Hiptmair and A. Buffa. Coercive combined field integral equations. *SAM ETH Zürich Report*, 6, 2003. submitted.
-

- [56] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators, I*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990. Distribution theory and Fourier analysis.
  - [57] G. C. Hsiao and W. L. Wendland. The Aubin-Nitsche lemma for integral equations. *J. Integral Equations*, 3(4):299–315, 1981.
  - [58] G. C. Hsiao and W. L. Wendland. Boundary integral methods in low frequency acoustics. *J. Chinese Inst. Engrs.*, 23(3):369–375, 2000.
  - [59] F. Ihlenburg and I. Babuška. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number. I. The  $h$ -version of the FEM. *Comput. Math. Appl.*, 30(9):9–37, 1995.
  - [60] T. Katsaounis, G. T. Kossioris, and G. N. Makrakis. Computation of high frequency fields near caustics. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 11(2):199–228, 2001.
  - [61] M. Köhl and S. Rjasanow. Multifrequency analysis for the Helmholtz equation. *Comput. Mech.*, 32(4-6):234–239, 2003.
  - [62] R. Leis. Zur Dirichletschen Randwertaufgabe des Aussenraumes der Schwingungsgleichung. *Math. Z.*, 90:205–211, 1965.
  - [63] W. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
  - [64] A. Meister. *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999. Eine Einführung in moderne Verfahren.
  - [65] L. Mirsky. Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 11:50–59, 1960.
  - [66] J.-C. Nédélec. Curved finite element methods for the solution of integral singular equations on surfaces in  $\mathbb{R}^3$ . In *Computing methods in applied sciences and engineering (Second Internat. Sympos., Versailles, 1975), Part 1*, pages 374–390. Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, Vol. 134. Springer, Berlin, 1976.
  - [67] J.-C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations*. Springer-Verlag, New York, 2001. Integral representations for harmonic problems.
  - [68] O. I. Panič. On the solubility of exterior boundary-value problems for the wave equation and for a system of Maxwell’s equations. *Uspehi Mat. Nauk*, 20(1 (121)):221–226, 1965.
-

- 
- [69] M. Pester and S. Rjasanow. A parallel preconditioned iterative realization of the panel method in 3D. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 3(1):65–80, 1996.
  - [70] F. Rellich. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von  $\Delta u + \lambda u = 0$  in unendlichen Gebieten. *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, 53:57–65, 1943.
  - [71] S. Rjasanow and M. Stolper. A compression method for the Helmholtz equation. submitted to Proceeding of the conference ENUMATH 2003.
  - [72] V. Rokhlin. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *J. Comput. Phys.*, 60(2):187–207, 1985.
  - [73] V. Rokhlin. Diagonal forms of translation operators for the Helmholtz equation in three dimensions. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 1(1):82–93, 1993.
  - [74] V. Rokhlin. Sparse diagonal forms for translation operators for the Helmholtz equation in two dimensions. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 5(1):36–67, 1998.
  - [75] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, second edition, 2003.
  - [76] Y. Saad and M. H. Schultz. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 7(3):856–869, 1986.
  - [77] J. Saranen and W. L. Wendland. On the asymptotic convergence of collocation methods with spline functions of even degree. *Math. Comp.*, 45(171):91–108, 1985.
  - [78] R. Schneider. *Multiskalen- und Wavelet-Matrixkompression*. Advances in Numerical Mathematics. B. G. Teubner, Stuttgart, 1998.
  - [79] R. Seeley. Topics in pseudo-differential operators. In *Pseudo-Diff. Operators (C.I.M.E., Stresa, 1968)*, pages 167–305. Edizioni Cremonese, Rome, 1969.
  - [80] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme*. Advances in Numerical Mathematics. B. G. Teubner, Wiesbaden, 2003.
-

- [81] O. Steinbach and W. L. Wendland. The construction of some efficient preconditioners in the boundary element method. *Adv. Comput. Math.*, 9(1-2):191–216, 1998. Numerical treatment of boundary integral equations.
  - [82] M. Stolper. Computing and compression of the boundary element matrices for the Helmholtz equation. *J. Numer. Math.*, 12(1):55–75, 2004. in Press.
  - [83] H. Triebel. *Theory of function spaces*, volume 78 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.
  - [84] G. Tröndle, M. Jäger, and H. Antes. Efficient calculation of acoustic fields by boundary element method. In *Boundary element topics (Stuttgart, 1995)*, pages 9–29. Springer, Berlin, 1997.
  - [85] E. E. Tyrtysnikov. Mosaic-skeleton approximations. *Calcolo*, 33(1-2):47–57 (1998), 1996. Toeplitz matrices: structures, algorithms and applications (Cortona, 1996).
  - [86] W. L. Wendland. Boundary element methods and their asymptotic convergence. In *Theoretical acoustics and numerical techniques*, volume 277 of *CISM Courses and Lectures*, pages 135–216. Springer, Vienna, 1983.
  - [87] W. L. Wendland. Asymptotic accuracy and convergence for point collocation methods. In *Topics in boundary element research, Vol. 2*, pages 230–257. Springer, Berlin, 1985.
  - [88] W. L. Wendland. Bemerkungen zu Randelementmethoden und ihre mathematischen und numerischen Aspekte. *Mitteilungen der GAMM*, Heft 2:3–27, 1986.
  - [89] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1982. Sobolevräume und Randwertaufgaben. Mathematische Leitfäden.
-